BAC 2020

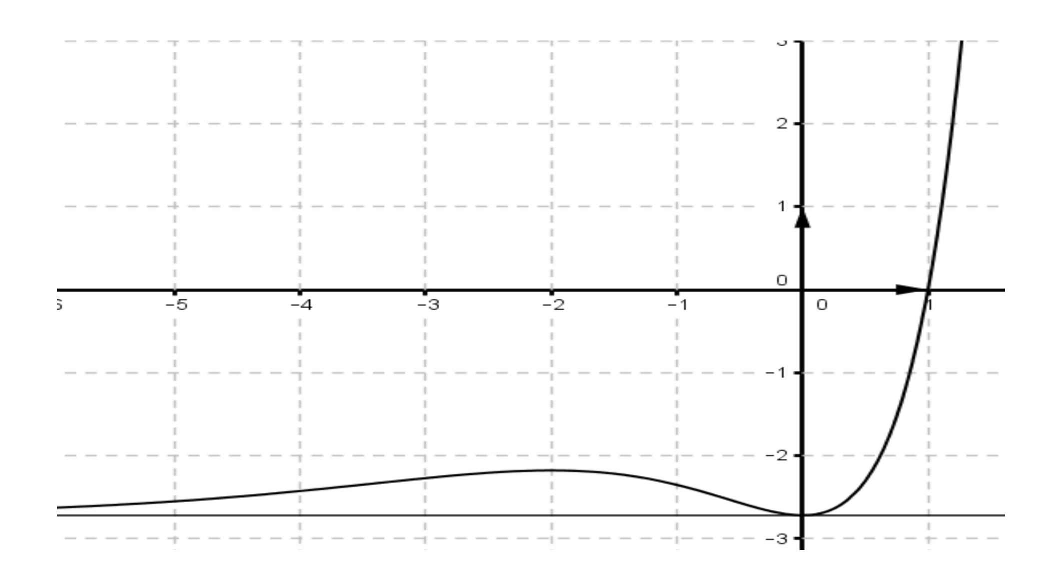
إلى جمهور طلبتنا الأوفياء مصدر تعلمنا المستمر

سلسلة حاقة للرياضيات

في رحــاب الـدوال الأسية

[مجموعة من التمارين المنتقاة والمتنوعة والهادفة]

(جميع الشعب العلمية)



BAC 2020 نعم ... استطيـــع

" لا تجعل الفشل ضمن الخيارات المتاحة لديك "

✍إعداد الأستاذ : محمــد حاقــة

ثانوية عبد العزيز الشريف – الوادي

الإهـــــداء

أهدي هذا العمل المتواضع إلى أبي الذي لم يبخل علي

يوماً بشيء

وإلى أمي التي زودتني بالحنان والمحبة

أقول لهم: أنتم وهبتموني الحياة والأمل والنشأة على

شغف الاطلاع والمعرفة وإلى إخوتي وزوجتي وأسرتي جميعاً

وإلى كل طالب علم يبحث عن المعرفة والتفوق

لا تنسوني بالدعاء

محبكم في الله

الأستاذ محمد حاقة

KING

نوفمبر 2019

بسم الله الرحمان الرحيم

مقدمة

الحمد لله الذي جعل لنا من العلم نورا نهدي به و بعد...

أتقدم بهذه السلسلة – سلسلة حاقة للرياضيات – في رحاب الدوال الأسية إلى طلبتي الأعزاء و إلى كل من يجمعنا بهم رباط العلم من قراء و مدرسين فهذه السلسلة تحتوي على

- ✓ ملخـــص شامل ومبسط
- ✓ المحطة الأولى: إشارة عبارة أسية
- ✓ المحطة الثانية: حساب الدالة المشتقة
- ✓ المحطة الثالثة: حساب النهايات
- ✓ المحطة الرابعة: تمارين متنوعة ومنتقاة لامتحانات سابقة جزائرية وأجنبية
- ✓ المحطة الخامسة: تمارين الدوال الأسية في البكالوريات الجزائرية من **2008** الى **2019**
- ✓ المحطة السادسة: حلول نموذجية لمجموعة من التمارين

وتركت بعضها دون حل وعليه أنصح الطالب بأخذ الوقت الكافي في التفكير فالمهم أن تأتي بالفكرة وحدك الآن أو غدا فالوقت المخصص للتمرين هو اكتساب مهارة التفكير

نرجو من الأساتذة الكرام و كذلك إخواننا الطلبة أن لا تبخلوا علينا بملاحظاتكم و اقتراحاتكم البناءة لنصوب أخطاءنا و نتفادى زلاتنا و نتلافى العيوب التي يمكن أننا ولا شك وقعنا فيها

و أسال الله عز و جل أن يوفقكم و يجعل النجاح حليفنا....

الأستاذ : مُحَمَّد حاقة

خريج المدرسة العليا للأساتذة

القبة القديمة – الجزائر

ملخص تفصيلي ومبسط في ميدان الدوال الأسية

1)<u>تعريف</u> : توجد دالة وحيدة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وتحقق : $f'(x) = f(x)$

و $f(0) = 1$ تسمى هذه الدالة بالدالة الآسية ذات الأساس e ونرمز لها بالرمز: $f : x \to e^x$

حيث e عدد حقيقي ثابت قيمته التقريبية $e \approx 2,71$

2)<u>خواص ونتائج</u> : من أجل كل عددين حقيقيين x و y و n عدد صحيح كيفي

1) $e^{x+y} = e^x \times e^y$ 2) $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ 3) $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$ 4) $e^x \times e^{-x} = 1$

5) $(e^x)^n = e^{nx}$ 6) $e^0 = 1$ 7) $(e^x)' = e^x$

8) $e^x > 0$ من أجل كل عدد حقيقي x تعميم $e^{\Delta} > 0$ معناه ($e^{\Delta} \neq$ سالب)

9) $e^x = e^y$ معناه $x = y$ 10) $e^x < e^y$ معناه $x < y$ 11) $e^x > e^y$ معناه $x > y$

12) $e^x = a$ يكافئ $x = \ln a$ حيث a عدد حقيقي موجب تماما

3)<u>النهايات الشهيرة</u>

الحالــة الخاصــة	الحالــة العامــة
$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$	$e^{+\infty} = +\infty$
$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$	$e^{-\infty} = 0$
$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$	$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$
$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$	$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$
$\lim_{x\to-\infty} x.e^x = 0^-$	$\lim_{x\to-\infty} x^n.e^x = 0$
$\lim_{x\to0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ وأيضا $\lim_{x\to0} \frac{e^{ax} - 1}{x} = a$	$\lim_{u\to0} \frac{e^u - 1}{u} = 1$

4)<u>قانون الاشتقاق</u> : $f(x) = e^{u(x)}$

إذا كانت u قابلة للاشتقاق على مجال I فان؛ $f'(x)=\left(e^{u(x)}\right)'=u'(x).e^{u(x)}$

*/ ملاحظة: تبقى قواعد الاشتقاق المعروفة سابقا صحيحة حسب شكل الدالة المعطاة

5)دراسة إشارة بعض العبارات الآسية

*/ أولا: [$e^{\Delta}\times$ (دالة)] هنا الإشارة من إشارة الدالة

*/ ثانيا: في كل ما يلي ، ترمز a، b ، c ، α، β إلى أعداد حقيقية

✓طريقة لدراسة إشارة عبارة من الشكل $a.e^{\alpha x+\beta}+b$ حيث $a.\alpha\neq 0$

- إذا كان a و b موجبان فان $a.e^{\alpha x+\beta}+b>0$
- إذا كان a و b سالبان فان $a.e^{\alpha x+\beta}+b<0$
- إذا كان a و b مختلفين في الإشارة أي $a.b<0$

فان للمعادلة حل x_0 يمكن إيجاده بكل بساطة (نتمرن على ذلك خلال التمارين) والإشارة تستنتج في جدول بالكيفية التالية:

x		x_0	
إشارة $a.e^{\alpha x+\beta}+b$	عكس إشارة $a.\alpha$	0	حسب إشارة $a.\alpha$

✓ طريقة لدراسة إشارة عبارة من الشكل $ae^{2x}+be^{x}+c$ حيث $a.b.c\neq 0$

لدراسة إشارة العبارة $ae^{2x}+be^{x}+c$ على $\mathbb{R}$ ، نقوم بما يلي

الخطوة الأولى: نضع $e^{x}=y$ ، فتصبح العبارة من الشكل $a.y^{2}+b.y+c$

الخطوة الثانية: نعين قيم y التي تعدمها، إن كانت تقبل حلول

الخطوة الثالثة: نستنتج قيم x وفي الأخير،نشكل جدولا ندرس فيه إشارة العبارة،مستخدمين القواعد المعروفة لإشارة كثيرات الحدود من الدرجة الثانية.

*/ ملاحظة: للعبارة $ae^{2x}+be^{x}+c$ تحليل من الشكل $a(e^{x}-y_1)(e^{x}-y_2)$ حيث y_1 و y_2 حلي المعادلة $a.y^{2}+b.y+c$

المحطـــــــة الأولـــــــى (إشارة بعض العبارات الآسية)

1) $A(x) = 2e^{x+1} + 1$ ، بما أنّ $e^{x+1} > 0$ فان $2e^{x+1} > 0$ ومنه $\underbrace{2e^{x+1} + 1}_{A(x)} > 1 > 0$ إذن حسب خاصية التعدي $A(x) > 0$ (معناه موجبة تماما)

2) $B(x) = -3e^{-x+2} - 4$ ، لدينا $B(x) = -(3e^{-x+2} + 4)$ وبما أن $3e^{-x+2} + 4 > 0$ (مثل الحالة (**1**)) فان $B(x) < 0$ (معناه سالبة تماما)

3) $C(x) = \underbrace{2}_{a} e^{x+3} \underbrace{-4}_{b}$ بما أن a و b مختلفين في الإشارة فان المعادلة $C(x) = 0$ تقبل حل ويتم إيجاده كما يلي

$$C(x) = 0 \Rightarrow 2e^{x+3} - 4 = 0 \Rightarrow 2e^{x+3} = 4 \Rightarrow e^{x+3} = \frac{4}{2} \Rightarrow e^{x+3} = 2$$
$$\Rightarrow \ln e^{x+3} = \ln 2$$
$$\Rightarrow x + 3 = \ln 2$$
$$\Rightarrow \boxed{x = -3 + \ln 2}$$

وتكون إشارة $C(x)$ كما يلي: قبل الحل عكس إشارة الجداء $a \times \alpha$ وبعد الحل من إشارة الجداء $a \times \alpha$ علما أنّ $a = 2$ و $\alpha = 1$ اذن $a \times \alpha > 0$ (موجب)

x	$-\infty$ $-3 + \ln 2$ $+\infty$
إشارة $C(x)$	$-$ 0 $+$

4) $D(x) = e^{\overbrace{-2}^{\alpha}x+1} \underbrace{-1}_{b}$ بما أن $a = 1$ و $b = -1$ مختلفين في الإشارة فان المعادلة $D(x) = 0$ تقبل حل ويتم إيجاده كما يلي

$$D(x) = 0 \Rightarrow e^{-2x+1} - 1 = 0 \Rightarrow e^{-2x+1} = 1 \Rightarrow \ln e^{-2x+1} = \underbrace{\ln 1}_{0}$$
$$\Rightarrow -2x + 1 = 0$$
$$\Rightarrow -2x = -1$$
$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{2}}$$

وتكون إشارة $D(x)$ كما يلي: قبل الحل عكس إشارة الجداء $a \times \alpha$ وبعد الحل من إشارة الجداء $a \times \alpha$ علما أنّ $a = 1$ و $\alpha = -2$ إذن $a \times \alpha < 0$ (سالب)

x	$-\infty$ $0,5$ $+\infty$
إشارة $D(x)$	$+$ 0 $-$

5) $E(x) = (x^2 + x - 2)e^{3-x}$ ، بما أن $e^{3-x} > 0$ فان إشارة $E(x)$ من إشارة "$x^2 + x - 2$" ومنه

$x^2+x-2=0$ نحسب المميز Δ : $\Delta=9>0$ يوجد حلين هما $\boxed{x=-2}$ أو $\boxed{x=1}$

(نستعمل قانون معادلة من الدرجة الثانية)

x	$-\infty$ $\quad -2 \quad$ 1 $\quad +\infty$
إشارة $E(x)$	$+$ $\quad 0 \quad$ $-$ $\quad 0 \quad$ $+$

6) $F(x)=e^{2x}+e^x-6$ ، نضع $\boxed{e^x=t}$ ومنه t^2 $e^{2x}=(\underbrace{e^x}_{t})^2=t^2$ وتصبح العبارة $F(x)$ من الشكل

$t^2+t-6=0$، نحسب المميز Δ : $\Delta=25>0$ يوجد حلين هما $\boxed{t=-3}$ أو $\boxed{t=2}$ ومنه

$e^x=-3$ مستحيلة لان $e^x>0$

$e^x=2$ إذن $\boxed{x=\ln 2}$

ملحوظة: العبارة $F(x)$ تحلل على الشكل $F(x)=(e^x-2)(e^x+3)$ وبما أن $e^x+3>0$ فان إشارة $F(x)$ من إشارة e^x-2 (رأيناها في الحالات السابقة)

x	$-\infty$ $\quad \ln 2 \quad$ $+\infty$
إشارة $F(x)$	$-$ $\quad 0 \quad$ $+$

7) $G(x)=e^{2x}-7e^x+12$ ، نضع $\boxed{e^x=t}$ ومنه t^2 $e^{2x}=(\underbrace{e^x}_{t})^2=t^2$ وتصبح العبارة $G(x)$ من الشكل

$t^2-7t+12=0$، نحسب المميز Δ : $\Delta=1>0$ يوجد حلين هما $\boxed{t=3}$ أو $\boxed{t=4}$ ومنه

$e^x=3$ اذن $x=\ln 3$

$e^x=4$ إذن $\boxed{x=\ln 4}$

ملحوظة: العبارة $G(x)$ تحلل على الشكل $F(x)=(e^x-3)(e^x-4)$ وتكون إشارة $G(x)$ بنفس قاعدة اشارة معادلة من الدرجة الثانية (لاحظ أنّ معامل e^{2x} يساوي (1) موجب)

x	$-\infty$ $\quad \ln 3 \quad$ $\ln 4$ $\quad +\infty$
إشارة $G(x)$	$+$ $\quad 0 \quad$ $-$ $\quad 0 \quad$ $+$

المحطـــــة الثانية (حساب الدالة المشتقة)

1) $f(x)=(2x+1)e^{x}-1$ تطبيق قاعدة اشتقاق جداء دالتين "$2x+1$" و "e^{x}"

ومنه $f'(x)=2e^{x}+(2x+1)e^{x}=(2+2x+1)e^{x}\Rightarrow \boxed{f'(x)=(2x+3)e^{x}}$

2) $f(x)=x-(x+1)e^{-x}$ ،ملحوظة: $(e^{-x})'=-e^{-x}$

ومنه $f'(x)=1-\left[1.e^{-x}-e^{-x}(x+1)\right]=1-\left[e^{-x}-xe^{-x}-e^{-x}\right]=1+xe^{-x}$

إذن $\boxed{f'(x)=1+xe^{-x}}$

3) $f(x)=e^{x}-ex-1$ ،ملحوظة $e\approx 2,71$ معناه $(ex)'=e$ (ضمن القاعدة $(ax)'=a$)

ومنه $\boxed{f'(x)=e^{x}-e}$

4) $f(x)=\dfrac{2x+2}{e^{x}+2}$ ، تطبيق قاعدة اشتقاق حاصل قسمة دالتين "$2x+2$" و "$e^{x}+2$"

ومنه $f'(x)=\dfrac{2(e^{x}+2)-e^{x}(2x+2)}{(e^{x}+2)^{2}}=\dfrac{2e^{x}+4-2xe^{x}-2e^{x}}{(e^{x}+2)^{2}}=\dfrac{4-2xe^{x}}{(e^{x}+2)^{2}}$

إذن $\boxed{f'(x)=\dfrac{4-2xe^{x}}{(e^{x}+2)^{2}}}$

5) $f(x)=\dfrac{e^{x}+4x-1}{e^{x}+1}$ (مثل الحالة (**4**))

ومنه
$$f'(x)=\frac{(e^{x}+4)(e^{x}+1)-e^{x}(e^{x}+4x-1)}{(e^{x}+1)^{2}}=\frac{e^{2x}+e^{x}+4e^{x}+4-e^{2x}-4xe^{x}+e^{x}}{(e^{x}+1)^{2}}$$
$$=\frac{6e^{x}-4xe^{x}+4}{(e^{x}+1)^{2}}=\frac{(6-4x)e^{x}+4}{(e^{x}+1)^{2}}$$

إذن : $\boxed{f'(x)=\dfrac{(6-4x)e^{x}+4}{(e^{x}+1)^{2}}}$

6) $f(x)=(2x-4)e^{\frac{1}{2}x}+2-x$ ، ملحوظة $\left(e^{\frac{1}{2}x}\right)'=\dfrac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}$

ومنه $f'(x)=2e^{\frac{1}{2}x}+\dfrac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}(2x-4)-1=2e^{\frac{1}{2}x}+xe^{\frac{1}{2}x}-2e^{\frac{1}{2}x}-1=xe^{\frac{1}{2}x}-1$

إذن: $\boxed{f'(x)=xe^{\frac{1}{2}x}-1}$

7) $f(x)=(x-1)e^{\frac{1}{x}}$ ، ملحوظة $\left(e^{\frac{1}{x}}\right)'=-\dfrac{1}{x^{2}}e^{\frac{1}{x}}$ لان $\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^{2}}$

ومنه $f'(x)=1.e^{\frac{1}{x}}+\left(-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\right)(x-1)=e^{\frac{1}{x}}-\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}+\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}=\left(\frac{x^2-x+1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}$

إذن: $\boxed{f'(x)=\left(\frac{x^2-x+1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}}$

8) $f(x)=x-1+\frac{4}{e^x+1}$ ، ملحوظة: $\boxed{\left(\frac{k}{u}\right)'=\frac{-ku'}{u^2}}$

ومنه $f'(x)=1+\frac{-4e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{(e^x+1)^2-4e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{e^{2x}+2e^x+1-4e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{e^{2x}-2e^x+1}{(e^x+1)^2}$

$=\frac{(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2}=\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$

إذن: $\boxed{f'(x)=\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2}$

9) $f(x)=\frac{x}{x-1}+e^{\frac{1}{x-1}}$ ، لدينا: $\left(\frac{1}{x-1}\right)'=\frac{-1}{(x-1)^2}$ وَ $\left(\frac{x}{x-1}\right)'=\frac{-1}{(x-1)^2}$

ومنه: $f'(x)=\frac{-1}{(x-1)^2}-\frac{1}{(x-1)^2}e^{\frac{1}{x-1}}=\frac{1}{(x-1)^2}\left(1+e^{\frac{1}{x-1}}\right)$ إذن $f'(x)=\frac{1}{(x-1)^2}\left(1+e^{\frac{1}{x-1}}\right)$

10) $f(x)=x.(1-e^x)^2$ ، ملحوظة $(u^n)'=n\times u^{n-1}\times u'$

وعليه $\left[(1-e^x)^2\right]'=2(1-e^x)^{2-1}\times(-e^x)=-2e^x(1-e^x)$

ومنه: $f'(x)=(1-e^x)^2-2e^x(1-e^x).x=(1-e^x)(1-e^x-2xe^x)=(1-e^x)\left[1-(1+2x)e^x\right]$

إذن: $\boxed{f'(x)=(1-e^x)\left[1-(1+2x)e^x\right]}$

المحطـــــــة الثالثة (حساب النهايات)

(عزيزي الطالب حتى تفهم هذه المحطة ضع النهايات الشهيرة أمامك الأن)

1) $f(x)=(2x+1)e^{x}-1$ معرفة على $\mathbb{R}$

أ/ $\lim\limits_{x\to-\infty}\underbrace{(2x+1)}_{-\infty}\underbrace{e^{x}}_{0}-1=-\infty\times 0$ وهي حالة عدم تعيين لإزالتها ننشر القوس على e^{x} نجد

$\lim\limits_{x\to-\infty}(2x+1)e^{x}-1=\lim\limits_{x\to-\infty}2\underbrace{xe^{x}}_{0}+\underbrace{e^{x}}_{0}-1=-1$ إذن $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-1}$

ب/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\underbrace{(2x+1)}_{+\infty}\underbrace{e^{x}}_{+\infty}-1=+\infty-1=+\infty$ إذن $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty}$

2) $f(x)=x-(x+1)e^{-x}$ معرفة على $\mathbb{R}$

أ/ $\lim\limits_{x\to-\infty}\underbrace{x}_{-\infty}-\underbrace{(x+1)}_{-\infty}\underbrace{e^{-x}}_{+\infty}=-\infty+\infty$ وهي حالة عدم تعيين لإزالتها نستخرج e^{-x} كعامل مشترك نجد

$$\lim_{x\to-\infty}x-(x+1)e^{-x}=\lim_{x\to-\infty}xe^{x}e^{-x}-(x+1)e^{-x}=\lim_{x\to-\infty}(\underbrace{xe^{x}}_{0}\underbrace{-x}_{+\infty}-1)\underbrace{e^{-x}}_{+\infty}=(+\infty)\times(+\infty)=+\infty$$

إذن $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty}$

ب/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\underbrace{x}_{+\infty}-\underbrace{(x+1)}_{+\infty}\underbrace{e^{-x}}_{0}=+\infty\times 0$ وهي حالة عدم تعيين لإزالتها نستخدم القاعدة $e^{-x}=\dfrac{1}{e^{x}}$ نجد

$$\lim_{x\to+\infty}x-(x+1)e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}x-(x+1).\frac{1}{e^{x}}=\lim_{x\to+\infty}\underbrace{x}_{+\infty}-\underbrace{\frac{x}{e^{x}}}_{0}+\underbrace{\frac{1}{e^{x}}}_{0}=+\infty$$

3) $f(x)=\dfrac{2x+2}{e^{x}+2}$ معرفة على $\mathbb{R}$

أ/ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+2}{e^{x}+2}=\dfrac{-\infty}{2}=-\infty$

ب/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+2}{e^{x}+2}=\dfrac{+\infty}{+\infty}$ وهي حالة عدم تعيين لإزالتها نستخرج e^{x} كعامل مشترك من بسط والمقام نجد

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+2}{e^{x}+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}\left(\frac{2x}{e^{x}}+\frac{2}{e^{x}}\right)}{e^{x}\left(1+\frac{2}{e^{x}}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\overbrace{\frac{x}{e^{x}}}^{0}+\overbrace{\frac{2}{e^{x}}}^{0}}{1+\underbrace{\frac{2}{e^{x}}}_{0}}=\frac{0}{1}=0$$

4) $f(x)=1-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{2}{e^{x}+1}$ معرفة على $\mathbb{R}$

أ/ $\lim\limits_{x\to-\infty}\underbrace{1-\dfrac{1}{2}x}_{+\infty}-\dfrac{2}{\underbrace{e^{x}}_{0}+1}=+\infty-2=+\infty$

ب/ $\lim_{x\to+\infty} \underbrace{1-\frac{1}{2}x}_{-\infty} - \underbrace{\frac{2}{e^x+1}}_{0} = -\infty$

5) $f(x) = \frac{x}{x-1} + e^{\frac{1}{x-1}}$ معرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ $\quad (\mathbb{R}-\{1\} =]-\infty;1[\cup]1;+\infty[)$

أ/ $\lim_{x\to-\infty} \underbrace{\frac{x}{x-1}}_{1} + \underbrace{e^{\overbrace{\frac{1}{x-1}}^{0}}}_{e^0=1} = 1+1=2$ و $\lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{x}{x-1}}_{1} + \underbrace{e^{\overbrace{\frac{1}{x-1}}^{0}}}_{e^0=1} = 1+1=2$

ب/ $\lim_{x \overset{>}{\longrightarrow} 1} \frac{x}{x-1} + e^{\frac{1}{x-1}} = \underbrace{\frac{1}{^{+}0}}_{+\infty} + \underbrace{e^{\overbrace{\frac{1}{^{+}0}}^{+\infty}}}_{+\infty} = +\infty + \infty = +\infty$ و $\lim_{x \overset{<}{\longrightarrow} 1} \frac{x}{x-1} + e^{\frac{1}{x-1}} = \underbrace{\frac{1}{^{-}0}}_{-\infty} + \underbrace{e^{\overbrace{\frac{1}{^{-}0}}^{-\infty}}}_{0} = -\infty + 0 = -\infty$

6) $f(x) = (2x-4)e^{\frac{1}{2}x} + 2 - x$ معرفة على $\mathbb{R}$

أ/ $\lim_{x\to-\infty} (\underbrace{2x-4}_{-\infty})\underbrace{e^{\frac{1}{2}x}}_{0} + 2 - x = -\infty \times 0$ وهي حالة عدم تعيين

إزالتها:

$$\lim_{x\to-\infty} (2x-4)e^{\frac{1}{2}x} + 2 - x = \lim_{x\to-\infty} -2(2-x)e^{\frac{1}{2}x} + 2 - x = \lim_{x\to-\infty} (\underbrace{2-x}_{+\infty})(\underbrace{-2e^{\frac{1}{2}x}}_{0} + 1) = +\infty$$

ب/ $\lim_{x\to+\infty} (\underbrace{2x-4}_{+\infty})\underbrace{e^{\frac{1}{2}x}}_{+\infty} + \underbrace{2-x}_{-\infty} = +\infty - \infty$ وهي حالة عدم تعيين

إزالتها: $\lim_{x\to+\infty} (2x-4)e^{\frac{1}{2}x} + 2 - x = \lim_{x\to+\infty} (\underbrace{2-x}_{-\infty})(\underbrace{-2e^{\frac{1}{2}x}}_{-\infty} + 1) = (-\infty.(-\infty) = +\infty$

7) $f(x) = \frac{x^2e^x}{e^x - x}$ معرفة على $\mathbb{R}$

أ/ $\lim_{x\to-\infty} \frac{\overbrace{x^2e^x}^{0}}{\underbrace{e^x}_{0} - x} = \frac{0}{+\infty} = 0$

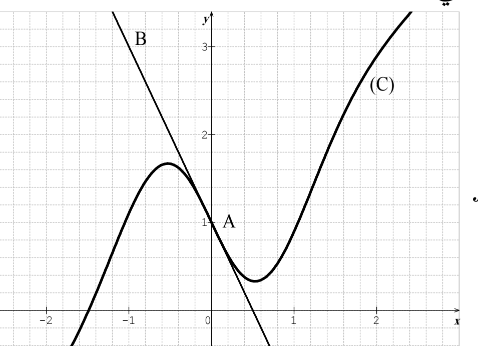
ب/ $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2e^x}{e^x - x}$ حالة عدم تعيين في المقام من النوع"$+\infty - \infty$" ، إزالتها:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2e^x}{e^x\left(1-\frac{x}{e^x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{1-\underbrace{\frac{x}{e^x}}_{0}} = \frac{+\infty}{1} = +\infty$$

المحطة الرابعة (تمارين متنوعة ومنتقاة في رحاب الدوال الآسية)

التمرين 01: بكالوريا فرنسا 2014

في المعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ نعتبر النقطتين $A(0;1)$ و $B(-1;3)$ والمنحنى (C) المقابل هو التمثيل البياني للدالة f القابلة للاشتقاق والمعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x + 1 + axe^{-x^2}$ حيث a عدد حقيقي



1) أ/ بين أن المنحنى (C) يشمل النقطة A

ب/ عين معامل توجيه المستقيم (AB)

ج/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x $f'(x) = 1 - a(2x^2 - 1)e^{-x^2}$

د/ عين العدد a بحيث يكون المستقيم (AB) مماسا لـ (C) في A

2) من السؤال السابق، من أجل كل عدد حقيقي x بيّن أن

$f(x) = x + 1 - 3xe^{-x^2}$ و $f'(x) = 1 + 3(2x^2 - 1)e^{-x^2}$

أ/ بين أنه من أجل كل x من المجال $]-1;0[$: $f(x) > 0$. و x من المجال $]-\infty;-1]$: $f'(x) > 0$

ب/ بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد c من المجال $\left[-\frac{3}{2};-1\right]$ حيث $f(c) = 0$ ، تحقق أن $c < -\frac{3}{2} + 2\times 10^{-2}$

التمرين 02: بكالوريا فرنسا 2019 بتصرف

$I-$ نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = (x+2)e^{x-4}$

1) أدرس تغيرات الدالة g

2) بين أن المعادلة $g(x) = 2$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $3 < \alpha < 3,1$

3) استنتج إشارة $(g(x) - 2)$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$

$II-$ نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x^2 - x^2e^{x-4}$

(C_f) المنحنى البياني لها في معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) بين أن: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = -x(g(x) - 2)$

3) استنتج إشارة $f'(x)$ ، ثم شكل جدول تغيراتها

4) بين أن $(\alpha+2).f(\alpha) = \alpha^3$ ثم استنتج $f(\alpha)$ وأعط حصرا للعدد $f(\alpha)$

5) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x) - x^2\right]$ ثم فسر النتيجة هندسيا

6) أدرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (C) منحنى الدالة مربع

7) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x) = 0$ وفسر النتائج هندسيا

8) أنشئ (C) و (C_f) على المجال $]-\infty;4]$

التمرين 03: امتحان أشبال الأمة

I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x) = 1 - e^{2x} - 2xe^{2x}$

1) أ/ عيّن نهاية الدالة g عند $-\infty$ و $+\infty$

ب/ أدرس اتجاه تغير الدالة g وشكل جدول تغيراتها

2) أحسب $g(0)$ ثم استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

II) لتكن الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = x + 3 - xe^{2x}$

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

1) عين نهاية الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$

2) بين أنّ المنحني (C_f) يقبل مقارب مائل (Δ) يُطلب تعيين معادلة له

3) أدرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ)

4) أ/ برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f'(x) = g(x)$

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها

5) بين أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتهما α و β حيث: $-3,5 < \alpha < -3$ و $0,5 < \beta < 1$

6) أرسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f)

7) h دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي $h(x) = \dfrac{1 + 3x - e^{\frac{2}{x}}}{x}$

أ/ بين أن من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $h(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

ب/ أحسب $h'(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة h وشكل جدول تغيراتها

التمرين 04: الامتحان الأول ثانوية عبد العزيز الشريف 2016 /2017

$I-$ نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = (1-x)e^{-x} - 2$

1) أدرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها

2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $-0,38 < \alpha < -0,37$

3) استنتج إشارة $g(x)$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$

$II-$ نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 2x + 1 - xe^{-x}$

(C_f) المنحنى البياني لها في معلم متعامد ومتجانس $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (وحدة الطول $2\,cm$)

1) بين أن: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $f'(x) = -g(x)$

3) استنتج إشارة $f'(x)$ ، ثم شكل جدول تغيراتها

4) بين أن $f(\alpha) = 2\alpha + 3 + \frac{2}{\alpha - 1}$ ثم أعط حصرا للعدد $f(\alpha)$

5) أثبت أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف ω يطلب تعيين إحداثياتها

6) أ/ بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة : $y = 2x + 1$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f)

ب/ أدرس الوضعية النسبية للمستقيم (Δ) بالنسبة للمنحنى (C_f)

7) بين أنه يوجد مماس (T) للمنحنى (C_f) يوازي المستقيم (Δ)، يطلب تعيين معادلته

8) أنشئ المنحنى (Δ) ، (T) و (C_f) على المجال $\left]-\infty;1\right]$

9) m وسيط حقيقي ، عيّن قيم m بحيث تقبل المعادلة: $-2x + xe^{-x} = m$ حلين

10) h دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x) = 2x - 1 + (1 - x)e^{1-x}$ وليكن (C_h) تمثيلها البياني

بين أنه يمكن استنتاج (C_h) انطلاقا من (C_f) (إنشاء (C_h) غير مطلوب)

التمرين 05: بكالوريا تونس2008 (مرفق بالحل)

f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $f(x) = x - \frac{1}{e^x - 1}$

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

1) أ/ أحسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ ثم فسر النتيجتين هندسيا

ب/ أكمل دراسة تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

2) أ/ بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $\ln 2 < \alpha < 1$ ثم أثبت أن؛ $f'(\alpha) = 1 + \alpha + \alpha^2$

ب/ أكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة $A\left(\alpha; f(\alpha)\right)$

3) أحسب؛ $f(-x) + f(x)$ ثم أعط تفسيرا هندسيا لهذه النتيجة

4) أحسب $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[f(x) - x - 1\right]$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - x\right]$ ، فسر النتيجتين هندسيا

5) أ/ أنشئ (T) و (C_f) نأخذ $\alpha \approx 0,8$

ب/ هل توجد مماسات للمنحنى (C_f) تعامد المستقيم ذا المعادلة $y = x$ ؟ برر إجابتك

ج/ ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $(m - 1) = me^x$

6) g دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $g(x) = -x + \frac{e^x}{e^x + 1}$

– بين أن $g(x) = f(-x)$ ثم أرسم (C_g) منحنى الدالة g

التمرين 06: الامتحان الأول ثانوية بوشوشة 2010 /2011 (مرفق بالحل)

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

$I-$ $\left(C_g\right)$ المنحنى الممثل للدالة g والمعرفة

على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=(1+ax^2)e^{bx}$ كما يلي

بقراءة بيانية

1) أحسب $g(-1)$ ، $g(0)$ و $g'(0)$

2) جد معادلة المماس لـ$\left(C_g\right)$ عند النقطة ذات الفاصلة 0

3) حل المعادلة؛ $g(x)=0$ ثم شكل جدول إشارة الدالة g

4) باستعمال المعطيات السابقة تحقق أن: $g(x)=(1-x^2)e^{-x}$

$II-$ f دالة معّرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=(x+1)^2e^{-x}$ وليكن $\left(C_f\right)$ تمثيلها البياني

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ ،ثم أثبت أن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ وفسر هذه النتيجة هندسيا

2) أ/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $f'(x)=g(x)$

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

3) أ/ عين دون حساب $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-1}{x}$ ،فسر النتيجة هندسيا

ب/ استنتج معادلة للمماس (T) للمنحنى $\left(C_f\right)$ عند $x_0=0$

4) أنشئ المنحنى $\left(C_f\right)$ والمماس (T) على المجال $\left]-2;+\infty\right[$

5) ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $f(x)=-m$

6) k دالة معرفة على $\left[0;+\infty\right[$ بـ: $k(x)=f(x^2)-1$

باستعمال مشتقة دالة مركبة أحسب $k'(x)$ واستنتج إشارتها، ثم شكل جدول تغيراتها

التمرين 07: الامتحان الأول ثانوية بوشوشة 2014 /2015 (مرفق بالحل)

$I-$ نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=(2x+1)e^x-1$

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$

2) أدرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها

3) أحسب $g(0)$ وحدد إشارة $g(x)$

$II-$ نعتبر الدالة f المعرفة على $\left]-\infty;1\right]$ بـ: $f(x)=x.(1-e^x)^2$

$\left(C_f\right)$ المنحنى البياني لها في معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

2) أ/ بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة : $y=x$ مستقيم مقارب مائل لـ $\left(C_f\right)$

ب/ أدرس الوضعية النسبية للمستقيم (Δ) بالنسبة للمنحنى (C_f)

3) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty;1[$ فان : $f'(x)=(e^x-1).g(x)$

4) استنتج إشارة $f'(x)$ ، ثم شكل جدول تغيراتها

5) أثبت أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف ω يطلب تعيين إحداثياتها

6) أكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة -1

7) أنشئ المنحنى (C_f)، (Δ) و (T)

$III-$ h دالة معرفة على $[-1;1]$ بـ: $h(x)=x.\left(1-e^{|x|}\right)^2$

1) ادرس قابلية اشتقاق الدالة h عند الصفر، ماذا تستنتج ؟

2) بين أن h دالة فردية، ثم استنتج طريقة لرسم منحناها دون دراسة تغيراتها

3) أنشئ منحنى الدالة h في نفس المعلم السابق

التمرين 08: الامتحان الأول ثانوية شنوف حمزة 2014 /2015

$I-$ نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=x-e^x-2$

1) أحسب نهاية الدالة h عند $-\infty$ و $+\infty$

2) أدرس اتجاه تغير الدالة h ، ثم شكل جدول تغيراتها

3) استنتج إشارة الدالة h

$II-$ نعتبر الدالة f المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=(1-x)e^{-x}-x-2$

(C_f) المنحنى البياني لها في معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1;+\infty[$ فان : $f'(x)=e^{-x}h(x)$

3) استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

4) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $-0,3<\alpha<-0,2$

5) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة : $y=-x-2$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f)

6) أدرس الوضعية النسبية للمستقيم (Δ) بالنسبة للمنحنى (C_f)

7) أثبت أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف ω يطلب تعيين إحداثياتها

8) بين أنه يوجد مماس (T) للمنحنى (C_f) يوازي المستقيم (Δ)، يطلب تعيين معادلته

9) أحسب $f(0)$، ثم أنشئ المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمماس (T)

10) نعتبر الدالة g المعرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=\left|f(x)\right|$

أ/ أنشئ (C_g) منحنى الدالة g انطلاقا من منحنى الدالة f

ب/ m وسيط حقيقي ، عيّن قيم m بحيث تقبل المعادلة: $g(x)=\left|m\right|$ حلين سالبين

التمرين 09: بكالوريا فرنسا 2010

I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=e^{x}-xe^{x}+1$

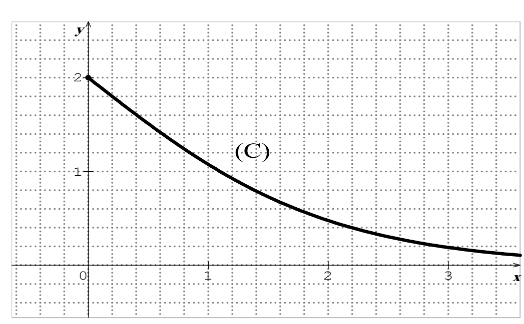
1) أ/ بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ ، ثم احسب نهاية الدالة g عند $-\infty$

ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها

2) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ ،ثم تحقق أنّ: $1,2<\alpha<1,3$

3) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\dfrac{4x}{e^{x}+1}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ وحدة الطول على محور الفواصل $1\,cm$ ، وعلى محور التراتيب $4\,cm$



1) أ/ أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f'(x)=\dfrac{4g(x)}{(e^{x}+1)^{2}}$

ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

2) أ/ أثبت أن $f(\alpha)=4(\alpha-1)$

ب/ ارسم المنحنى (C_f)

III) تمثل في الشكل المقابل المنحنى (C) للدالة h والمعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{4}{e^{x}+1}$ ، من أجل كل عدد حقيقي نسمي M ، P و Q النقط التي احداثياتها على الترتيب $(x;h(x))$ ، $(x;0)$ و $(0;h(x))$

1) بيّن أن مساحة المستطيل $OPMQ$ تكون أعظمية اذا كانت α فاصلة النقطة M

2) نفرض أن فاصلة M هي α ، أثبت أنّ المماس (T) في النقطة M للمنحنى (C) يوازي المستقيم (PQ)

التمرين 10:

$I-$ نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=2e^{x}+2x-7$

1) احسب : $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

2) ادرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها

3) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $\alpha\in\left]0,94;0,95\right[$

4) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

$II-$ نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=(2x-5)(1-e^{-x})$ ، (C_f) تمثيلها البياني

1) أدرس إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$

2) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

3) أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=e^{-x}.g(x)$

4) أ/ بين أن $f(\alpha)=\dfrac{(2\alpha-5)^{2}}{2\alpha-7}$

ب/ أدرس اتجاه تغير الدالة h المعرفة بـ $h(x)=\frac{(2x-5)^2}{2x-7}$ على المجال $]-\infty;2,5[$

ج/ استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$ بتقريب $0,01$

5) بين أن المستقيم (d) ذا المعادلة $y=2x-5$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

6) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (d)

7) أنشئ (d) و (C_f) على المجال $[0,5;+\infty[$

التمرين 11 (مرفق بالحل)

f دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $f(x)=xe^{\frac{1}{x}}$

1) احسب: $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

2) احسب: $\lim_{x\overset{<}{\longrightarrow}0} f(x)$ و $\lim_{x\overset{>}{\longrightarrow}0} f(x)$ فسر النتيجتين هندسيا

3) أ/ برهن أن: $\lim_{|x|\to+\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)=1$ ، (يمكنك وضع: $t=\frac{1}{x}$)

ب/ استنتج أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y=x+1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$ و $+\infty$

4) احسب $f'(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

5) ارسم (C_f)

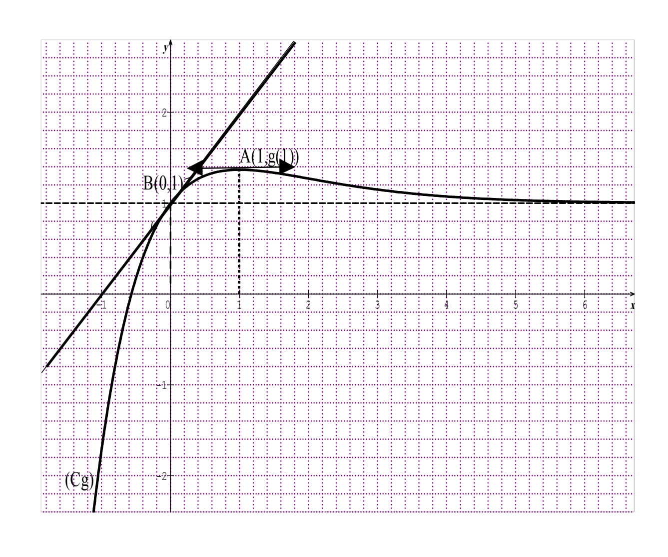
6) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $g(x)=f(x^2)$

باستعمال مشتق دالة مركبة أحسب: $g'(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة g

7) لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $h(x)=|x|e^{\frac{1}{|x|}}$ – باستعمال المنحنى (C_f) أنشئ المنحنى (C_h)

8) k دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $k(x)=|f(x)|$ – باستعمال المنحنى (C_f) أنشئ المنحنى (C_k)

التمرين 12(مرفق بالحل)



المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

$I-$ (C_g) المنحنى الممثل للدالة g والمعرفة

على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=axe^{bx}+1$ كما يلي

(C_g) يقبل مماسا أفقيا عند النقطة A

(T) المماس للمنحنى (C_g) عند النقطة B

1) **بقراءة بيانية**

أ/ جد: $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)$

ب/ أحسب $g'(1)$ و $g'(0)$

ج/ علل وجود عدد حقيقي وحيد α في المجال $]-0,57;-0,56[$ يحقق؛ $g(\alpha)=0$ ثم استنتج إشارة $g(x)$

2) باستعمال المعطيات السابقة بين أن: $f(x)=xe^{-x}+1$

$II-$ f الدالة المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=x-(x+1)e^{-x}$ وليكن $\left(C_f\right)$ تمثيلها البياني

1) أثبت أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

2) أ/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1;+\infty[$ ، $f'(x)=g(x)$

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة f على $]-1;+\infty[$، ثم شكل جدول تغيراتها

3) أ/ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]$ وفسر النتيجة هندسيا

ب/ أدرس وضعية $\left(C_f\right)$ بالنسبة للمستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$

4) بين أن المنحنى $\left(C_f\right)$ يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها

5) أوجد معادلة المماس (d) للمنحنى $\left(C_f\right)$ الموازي لـ(Δ)

6) أنشئ $\left(C_f\right)$، (d) و (Δ) (نأخذ: $f(\alpha)\approx -1,3$)

7) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $m+(x+1)e^{-x}=0$

التمرين 13 : بكالوريا أجنبية

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=(x-2)^2.e^x$ وليكن $\left(C_f\right)$ المنحنى البياني لها في معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ ثم فسر النتيجة الثانية هندسيا

2) أ/ بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ؛ $f'(x)=x(x-2)e^x$

ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

3) أ/ بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ؛ $f''(x)=(x^2-2)e^x$

ثم استنتج أن المنحنى $\left(C_f\right)$ يقبل نقطتي انعطاف(لا يطلب تعيين احداثياهما)

ب/ أنشئ المنحنى $\left(C_f\right)$ على المجال $\left]-\infty;2,5\right]$

4) ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة؛ $(x-2)^2=m^2.e^{-x}$

التمرين14: بكالوريا المغرب بتصرف 2006/2005

$I-$ g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=e^{-x}+x-1$

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

2) أدرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها

3) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ؛ $e^{-x}+x\geq 1$

$II-$ f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\dfrac{x}{x+e^{-x}}$

(C_f) المنحنى البياني لها في معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (وحدة الطول $2cm$)

1) أ/ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ب/ بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$؛ $f(x)=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{xe^x}}$ ، ثم أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ وفسر النتيجة هندسيا

2) أ/ بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$؛ $f'(x)=\dfrac{(1+x)e^{-x}}{(x+e^{-x})^2}$

ب/ استنتج إشارة $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيراتها

3) أ/ أكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة المعدومة

ب/ تحقق من أن: $x-f(x)=\dfrac{x.g(x)}{g(x)+1}$ واستنتج الوضع النسبي لـ(T) مع (C_f)، ماذا تستنتج؟

4) أنشئ المنحنى (C_f) والمماس (T)

5) نعتبر المستقيمات (d_m) المعرفة بـ: $y=mx$ حيث m وسيط حقيقي

أ/ بين أن جميع المستقيمات (d_m) تمر من نقطة ثابتة يطلب تعيينها

ب/ ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $x\left[(x+e^{-x})m-1\right]=0$

التمرين15(مرفق بالحل)

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\dfrac{1}{2}x+1+e^{-|x|}$

(C_f) المنحنى البياني لها في معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) أكتب $f(x)$ دون رمز القيمة المطلقة

2) ادرس استمرارية الدالة f عند 0

3) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند 0 ، وفسر النتيجة هندسيا

4) أكتب معادلة نصفي المماسين (T_1) و (T_2) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0

5) أحسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$

6) أدرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

7) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $-2,3<\alpha<-2,2$

8) أرسم (T_1) ، (T_2) و (C_f)

9) ناقش بيانيا، وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $1-m+e^{-|x|}=0$

التمرين16(مرفق بالحل)

$I-$ نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=2-xe^x$

1) احسب $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)$

2) ادرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها

3) أ/ بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على $]0;+\infty[$

ب/ تحقق أن: $0,8 < \alpha < 0,9$ ،ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

II– نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = \dfrac{2x+2}{e^x+2}$ و (C_f) تمثيلها البياني (وحدة الطول $2cm$)

1) أحسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ وبرهن أن؛ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ مفسرا النتيجة هندسيا

2) أ/ لتكن f' مشتقة الدالة f بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \dfrac{2g(x)}{(e^x+2)^2}$

ب/ استنتج إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$ ، ثم شكل جدول تغيراتها

3) بين أن $f(\alpha) = \alpha$

4) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x+1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$

5) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ)

6) أنشئ (Δ) و (C_f)

7) عين بيانيا مجموعة قيم الأعداد الحقيقية m التي من أجلها يكون للمعادلة $me^x + 2(m-1) - 2x = 0$ حلان موجبان

التمرين 17 (مرفق بالحل)

I– لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = ae^{2x} + be^x + c$ ، حيث a ، b و c أعداد حقيقية

(C_f) هو التمثيل البياني للدالة في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

☒ عين a ، b و c بحيث المنحنى (C_f) يشمل النقطة O والدالة المشتقة f' تنعدم من أجل $x = \ln\dfrac{3}{4}$

والمستقيم ذا المعادلة $y = 1$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f) بجوار $-\infty$

II– نأخذ فيما يلي: $a = 2$ و $b = -3$ و $c = 1$

1) احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$. ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى (C_f) ؟

2) احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

3) ادرس اتجاه تغير f و شكل جدول تغيراتها

4) حدد نقط تقاطع المنحني (C_f) مع حامل محور الفواصل

5) عين معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 0

6) أحسب $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ ،فسّر النتيجة هندسيا (هذا السؤال خاص بشعبتي رياضيات والتقني رياضي فقط)

7) أنشئ (C_f)

التمرين18: بكالوريا جوان النظام القديم 2006/2005

$I-$ نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = (3-2x)e^x + 2$

1) احسب ، $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$. وفسر النتيجتين بيانيا

2) ادرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها

3) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $1,68 < \alpha < 1,69$

4) استنتج إشارة $g(x)$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$

$II-$ نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = \dfrac{e^x + 4x - 1}{e^x + 1}$ (C_f) تمثيلها البياني

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى (C_f)؟

2) أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \dfrac{2\,g(x)}{(e^x+1)^2}$

3) بين أن $f(\alpha) = 4\alpha - 5$ ثم أعط حصرا للعدد $f(\alpha)$

4) ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

5) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = 4x - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$

6) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ)

7) أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة المعدومة

8) ارسم كلا من (T) ، (Δ) و (C_f)

9) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $me^x - 4x + m + 2 = 0$

التمرين19: الامتحان الأول ثانوية عبد العزيز الشريف 2016/2015 (مرفق بالحل)

$I-$ لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = \dfrac{1}{2}x - e^{\frac{x}{2}}$

1) ادرس تغيرات الدالة g

2) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

$II-$ نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = (-x-2)e^{-\frac{x}{2}} + 2 - x$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2) بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ؛ $f(x) = (-x-2)\left(e^{\frac{-x}{2}} + 1\right) + 4$ ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

3) أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = e^{\frac{-x}{2}}\, g(x)$

4) استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

5) أ/ أحسب: $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(2-x)\right]$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا

ب/ عيّن إحداثيات النقطة B نقطة تقاطع (C_f) مع المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-x+2$

ج/ استنتج وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ)

6) أثبت أن (C_f) يقبل مماسا يوازي المستقيم (Δ)

7) أحسب $f(0)$ ثم أكتب معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة 0

8) أحسب $f(-2)$ ثم أنشئ (Δ)، (T) و (C_f) على المجال $]-2;+\infty[$

9) m وسيط حقيقي،ناقش بيانيا،وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $(m-2)e^{\frac{x}{2}}+x+2=0$

التمرين20:بكالوريا أجنبية 2001

$I-$ نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=(x^2+2x-1)e^{-x}+1$

1) بين أن $\lim_{x\to+\infty}g(x)=1$ وفسر النتيجة هندسيا، ثم أحسب نهاية الدالة g عند $+\infty$

2) أدرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها

3) أ/ بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والأخر α حيث، $-2,4<\alpha<-2,3$

ب/ استنتج إشارة الدالة g

$II-$ نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x-(x^2+4x+3)e^{-x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) أحسب $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}f(x)$

2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ فان ، $f'(x)=g(x)$

3) استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

4) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $-0,3<\alpha<-0,2$

5) أ/ بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة : $y=x$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$

ب/ بيّن أن المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) يتقاطعان في نقطتين A و B يطلب تعيينهما

ج/أدرس الوضعية النسبية للمستقيم (Δ) بالنسبة للمنحنى (C_f)

6) أنشئ المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ)

التمرين21:بكالوريا أجنبية 2004

f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=1-\frac{1}{2}x-\frac{2}{e^x+1}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ؛ $\frac{1}{e^{-x}+1}=1-\frac{1}{e^{x}+1}$ ثم استنتج أن الدالة f فردية

2) أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

3) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g'(x)=-\frac{1}{2}\left(\frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}\right)^2$ وشكل جدول تغيرات الدالة f على المجال $[0;+\infty[$

4) استنتج أنه من أجل كل x من $[0;+\infty[$ ؛ $1-\frac{2}{e^{x}+1}\leq\frac{1}{2}x$

5) بين أن؛ $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-1+\frac{1}{2}x\right]=0$ ثم فسر النتيجة هندسيا

6) أنشئ المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=1-\frac{1}{2}x$

التمرين22:

f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\frac{(x+1)e^{x}+x+2}{e^{x}+1}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

2) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=\frac{e^{2x}+e^{x}+1}{(e^{x}+1)^2}$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

3) بين أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $-2<\alpha<-1$

4) أ/ بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ؛ $f(x)=x+1+\frac{1}{e^{x}+1}$ وأن: $f(x)=x+2-\frac{e^{x}}{e^{x}+1}$

ب/ استنتج أنّ (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (d) و (d') يطلب تعيين معادلتيهما

5) أثبت أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ؛ $f(-x)+f(x)=3$ وفسّر النتيجة هندسيا

6) أنشئ (d) ، (d') و (C_f)

التمرين23:

$I)$ نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=2(1-e^{-x})-x$

1) ادرس تغيرات الدالة g

2) بين أن للعادلة $g(x)=0$ حلين في $\mathbb{R}$ أحدهما معدوم و الأخر α حيث : $\ln 4<\alpha<\ln 6$

3) استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x

II) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي : $f(x)=\frac{1-e^{x}}{x^2}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) أثبت أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}=+\infty$ (يمكن وضع $x=2t$) .ثم استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

2) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to0}}f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to0}}f(x)$ ثم فسر النتائج هندسيا

3) أ/ تحقق أن : $f(\alpha)=\frac{1}{\alpha(\alpha-2)}$ ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$

ب/ بيّن أن f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ و أنه لكل x من $\mathbb{R}^*$: $f'(x)=\frac{e^x.g(x)}{x^3}$

ج/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f

4) أنشئ المنحني (C_f) في المجالين $]-\infty;0[\cup]0;5]$

التمرين24:

$I-$ g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1-(ax+b)e^{x-2}$ حيث a و b عددان حقيقيان

1) أحسب $g'(x)$ بدلالة a و b

2) عين قيمتي a و b إذا علمت أن منحنى الدالة g يقبل مماسا موازيا لحامل محور الفواصل عند النقطة $A(-3;1+2e^{-5})$

نأخذ فيما يلي: $a=2$ و $b=4$

3) أ/ ادرس تغيرات الدالة g

ب/ بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,4<\alpha<0,5$ واستنتج إشارة $g(x)$

$II-$ نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=x^2e^{x-2}-\frac{1}{4}x^2$ (C_f) تمثيلها البياني (وحدة الطول $2cm$)

1) بين أن $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=-\frac{1}{2}x.g(x)$

3) استنتج إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$ ،ثم شكل جدول تغيراتها

4) عين نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل

5) أنشئ (C_f) على المجال $[-5;2]$ (نأخذ $f(\alpha)\approx-0,2$)

$III-$ نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $h(x)=e^{1-f(x)}$

أحسب $h'(x)$ واستنتج إشارتها ثم شكل جدول تغيراتها (دون حساب عبارة $h(x)$)

التمرين 25:

$I-$ لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x)=x-e^{-\frac{1}{2}x}$

1) ادرس تغيرات الدالة h

2) بين أن المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0,70<\alpha<0,71$

3) استنتج إشارة $h(x)$

$II-$ نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=(2x-4)e^{\frac{1}{2}x}+2-x$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ **[وحدة الطول 1cm]**

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ؛ $f(x)=(2-x)\left(1-2e^{\frac{1}{2}x}\right)$ ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

3) أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=e^{\frac{1}{2}x}h(x)$

4) أ/استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

ب/ بين أن $f(\alpha)=4-\alpha-\dfrac{4}{\alpha}$ ثم أعط حصرًا للعدد $f(\alpha)$

5) دون حساب عين؛ $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ وفسر النتيجة هندسيا

6) أ/ أحسب، $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(2-x)\right]$ ثم فسر النتيجة هندسيا

ب/ أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم $(\Delta): y=-x+2$

7) أ/ أوجد إحداثيات نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل

ب/ حدد النقطة E نقطة تقاطع (C_f) مع حامل محور التراتيب

8) أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة E

9) أ/ ارسم كلا من (T) ، (Δ) و (C_f)

ب/ ليكن m وسيط حقيقي، ناقش بيانيا، وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول

المعادلة التالية: $(2x-4)e^{\frac{1}{2}x}-m+2=0$

10) k الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $k(x)=\left[f(x)\right]^2$

أ/ أحسب $k'(x)$ بدلالة كل من $f'(x)$ و $f(x)$ ، ثم استنتج إشارة $k'(x)$

ب/ شكل جدول تغيرات الدالة h

التمرين26:

$I-$ لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=-e^{x}-x+4$

1) ادرس تغيرات الدالة h

2) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $1,07<\alpha<1,08$

3) استنتج إشارة $g(x)$

$II-$ نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=-x+3+\dfrac{x-3}{e^x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (وحدة الطول **2 cm**)

1) بيّن أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

2) أ/ بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ؛ $f'(x)=\dfrac{g(x)}{e^x}$

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

ج/ بين أن $f(\alpha)=-\left(\alpha-2+\dfrac{1}{\alpha-4}\right)$ ثم أعط حصرًا للعدد $f(\alpha)$

3) أ/ أحسب، $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)+x-3\right]$ ثم فسر النتيجة هندسيا

ب/ أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم $(\Delta): y=-x+3$

4) بين أنه يوجد مماس (T) لـ(C_f) يوازي المستقيم (Δ) ، يطلب إعطاء معادلة لهذا المماس

5) أ/ أحسب $f(0)$ و $f(3)$ ، ثم انشئ (Δ) و (C_f) على المجال $\left]-0,75;+\infty\right[$ (تعطى $f(-0,75)\approx -4,2$)

ب/ ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m من المجال $\left]-4;+\infty\right[$ عدد وإشارة حلول

المعادلة: $x-3=(m-3)e^x$

6) k الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $k(x)=-x+3+\dfrac{x-2}{e^{x+1}}$ وليكن (C_k) تمثيلها البياني

بين أن يمكن استنتاج (C_k) انطلاقا من (C_f) **[** انشاء (C_f) غير مطلوب**]**

التمرين 27:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=x-\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$

(C_f) هو التمثيل البياني للدالة في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) أ/ تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)=x-1+\dfrac{2}{e^x+1}$ و $f(x)=x+1-\dfrac{2e^x}{e^x+1}$

ب/ احسب نهايات الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$

ج/ بين أن المستقيمين (Δ_1) و (Δ_2) اللذين معادلتاهما على الترتيب $y=x+1$ و $y=x-1$

مقاربان لـ(C_f) عند $-\infty$ وعند $+\infty$ على الترتيب

د/ حدد وضعية المنحني (C_f) بالنسبة إلى كل من (Δ_1) و (Δ_2)

2) أ/ بين أن الدالة f فردية

ب/ ادرس تغيرات الدالة f على $\left[0;+\infty\right[$

3) أكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 0

4) ارسم (Δ_1) ، (Δ_2) ، ثم المنحنى (C_f)

التمرين28:

$I-$ نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = 2x - 5 + 2e^{2x}$

1) احسب : $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

2) ادرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها

3) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $\alpha \in \left]0,3;0,4\right[$

4) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

$II-$ نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = (x-2)(2-e^{-2x})$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = e^{-2x}.g(x)$

3) بين أن $f(\alpha) = \dfrac{(\alpha-2)^2}{2\alpha-5}$ ثم أعط حصرًا للعدد $f(\alpha)$

4) شكل جدول تغيرات الدالة f

5) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x) = 0$ واستنتج إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$

6) أ/ بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(2x-4)\right] = 0$ وفسر النتيجة هندسيا

ب/ أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (d) ذا المعادلة $y = 2x-4$

7) أنشئ (d) و (C_f) على المجال $\left[0;+\infty\right[$

8) ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $\ln\left(\dfrac{(x-2)(2e^{2x}-1)}{-3x+m}\right) - 2x = 0$

$III-$ h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x) = \left[f(x)\right]^3$

1) أحسب $h'(x)$ بدلالة $f(x)$ و $f'(x)$ ، ثم استنتج إشارة $h'(x)$

2) شكل جدول تغيرات الدالة h

التمرين29:

f دالة معرفة على $\left[0;+\infty\right[$ كما يلي: $f(x) = (x-1)(2-e^{-x})$

(C_f) التمثيل البياني في المستوي المنسوب إلى معلم و متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ (وحدة الطول $2cm$)

1) أ/ احسب نهاية الدالة f عند $+\infty$

ب/ بين أن المستقيم (D) ذا المعادلة: $y = 2x-2$ مقارب للمنحنى (C_f)

ج/ ادرس الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) و المستقيم (D)

2) أ/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x موجب؛ $f'(x) = xe^{-x} + 2(1 - e^{-x})$

ب/استنتج أنه أجل كل عدد حقيقي x موجب ، $f'(x) \geq 0$

ج/ حدّد $f'(0)$ ثم شكل جدول تغيرات f

3) ارسم (D) والمنحنى (C_f)

4) عين النقطة A من (C_f) التي يكون عندها المماس موازيا للمستقيم (D)

5) ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $f(x) = 2x + m$

التمرين30:

$I-$ نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = \dfrac{4e^x + 2}{e^x + 1}$

1) احسب : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ، وفسر النتيجتين بيانيا

2) ادرس اتجاه تغير الدالة f

3) أكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) عند النقطة $A(0,3)$

4) ارسم (C_f) و (Δ)

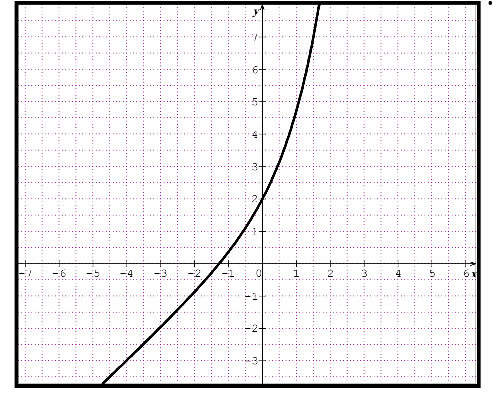
$II-$ نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = e^x + 5 - 2\sqrt{2}$ (C_g) تمثيلها البياني

1) ادرس تغيرات الدالة g (لا يطلب رسم (C_g))

2) أدرس تقاطع المنحنيين (C_f) و (C_g)

3) برهن أن للمنحنيين نقطة مشتركة وحيدة B يطلب إيجاد إحداثياتها

4) أوجد معادلتي المماسين للمنحنيين (C_f) و (C_g) في النقطة B ماذا تلاحظ ؟



التمرين31:

$I-$ نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ ،كما يلي $g(x) = e^x + x + 1$

المنحنى (C_g) المقابل هو تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

بقراءة بيانية

1) شكل جدول تغيرات الدالة g

2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $-1,3 < \alpha < -1,2$

3) استنتج إشارة $g(x)$

$II-$ نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = \dfrac{xe^x}{e^x + 1}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ ، وفسر النتيجة الثانية هندسيا

2) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

3) أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \dfrac{e^x\, g(x)}{(e^x+1)^2}$

4) بين أن $f(\alpha) = \alpha + 1$ ثم أعط حصرًا للعدد $f(\alpha)$

5) ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

6) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ)

7) أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة المعدومة

8) ارسم كلا من (T) ، (Δ) و (C_f)

9) عين بيانيا مجموعة قيم الأعداد الحقيقية m التي من أجلها يكون للمعادلة $f(-x) = m$ حلان

التمرين 32:

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = -x + 1 + e^{-2x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) أدرس تغيرات الدالة f

2) أثبت أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ)عند $+\infty$ ، يطلب تحديد معادلته

3) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ)

4) بين أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 حيث: $1 < x_0 < 2$

5) أرسم (Δ) و (C_f)

6) أثبت أن للمنحنى (C_f) مماس وحيد معامل توجيهه يساوي -3 ، أكتب معادلته

7) ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $f(x) = -3x + m$

التمرين 33:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = \dfrac{2e^x - 1}{e^x + 1}$.

(C_f) منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ (وحدة الطول $1\,cm$)

1) عين قيمتي العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ؛ $f(x) = a + \dfrac{be^x}{e^x + 1}$

2) أحسب نهاية الدالة f عند كل من $-\infty$ و $+\infty$ ، ماذا تستنتج بالنسبة لـ(C_f)

3) أحسب $f(-x) - 1$ وماذا تستنتج ؟

4) بيّن أن الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ ، ثم شكل جدول تغيراتها

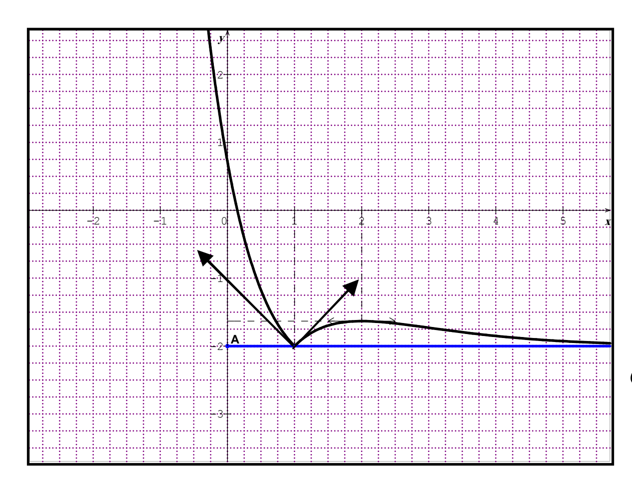
5) أ/ عين فاصلة A نقطة تقاطع (C_f) وحامل محور الفواصل، ثم استنتج $f(\ln 2)$

ب/ بين أنّ $y=\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}$ هي معادلة للمماس (d) للمنحنى (C_f) عند النقطة O

6) ارسم المماس (d) والمنحنى (C_f)

التمرين 34:

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ ، الشكل المقابل يمثل (C) منحنى الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$



1) بقراءة بيانية:

أ/ جد $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

ب/ شكل جدول تغيرات الدالة f

ج/ ضع تخمينا حول قابلية اشتقاق الدالة f عند 1

د/ عين $f'(2)$ ، $f_d'(1)$ و $f_g'(1)$ ثم تأكد من صحة تخمينك

2) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=e^{f(x)}$

❖ أحسب $g'(x)$ واستنتج إشارتها ثم شكل جدول التغيرات

قف عنـــد ناصيـــة الحلـــم وقاتل

المحطـــــــــة الخامسة :(بكالوريات الشعب العلمية المشتركة في رحاب الدوال الآسية)

شعبة العلوم التجريبية

التمرين 35: دورة 2019

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. وحدة الطول هي **2cm**

(C_f) و (C_g) التمثيلان البيانيان للداالتين f و g المعرفتين على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x)=e^x-\frac{1}{2}ex^2 \quad \text{و} \quad g(x)=e^x-ex$$

1) أ) أدرس اتجاه تغير الدالة g ب) استنتج اشارة $g(x)$ حسب قيم x الحقيقية

2) ادرس اتجاه تغير الدالة f

3) احسب كلا من $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. ثم شكل جدول تغيرات f

4) ادرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (C_g) على $\mathbb{R}$

5) ارسم على المجال $[0;2]$ المنحنيين (C_f) و (C_g) في نفس المعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (تعطى $e^2-2e\approx 2$)

6) h الدالة المعرفة على المجال $[-2;2]$ بـ: $f(x)=\frac{1}{2}ex^2-e^{|x|}$ و (Γ) تمثيلها البياني في المعلم السابق

أ) بين أن h دالة زوجية

ب) من أجل $x\in[0;2]$ احسب $h(x)+f(x)$ ثم استنتج كيفية رسم (Γ) إنطلاقا من (C_f) ثم أرسمه

التمرين 36: دورة 2018

$I-$ g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=2+(x-1)e^{-x}$

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

2) ادرس اتجاه تغير الدالة g وشكل جدول تغيراتها

3) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد α ،حيث $-0,38<\alpha<-0,37$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

II) لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=2x+1-xe^{-x}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) أ/ أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ب/ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(2x+1)\right]$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا

ج/ أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) حيث: $(\Delta): y=2x+1$

2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون: $f'(x)=g(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها

3) اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1

4) ارسم (Δ) ، (T) والمنحنى (C_f) (نأخذ $f(\alpha)=0,8$)

5) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول x : $x=(1-m)e^x$

التمرين 37: دورة 2017 العادية

$I-$ f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=2-x^2e^{1-x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$ وأعط تفسيرا هندسيا لهذه النتيجة، ثم أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

2) أ/ بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=x(x-2)e^{1-x}$

ب/ أدرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

3) أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1

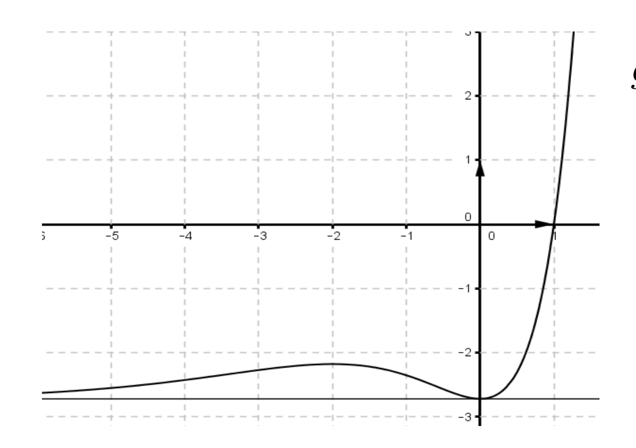
$II-$ h الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=1-xe^{1-x}$

1) بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $h(x)\geq 0$ ، ثم أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمماس (T)

2) بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيدًا α حيث $-0,7<\alpha<-0,6$

3) أنشئ المماس (T) والمنحنى (C_f) على المجال $\left[-1;+\infty\right[$

التمرين 38: دورة 2017 الاستدراكية (مرفق بالحل)



$I-$ g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=x^2e^x-e$

(C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ كما هو في الشكل المقابل

- أحسب $g(1)$
- بقراءة بيانية عيّن إشارة $g(x)$ ثم استنتج إشارة $g(-x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x

$II-$ f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x)=e^{-x}-2-\dfrac{e}{x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) احسب النهايات الأتية: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}f(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

2) بين أن المنحنى (γ) الذي معادلته $y=e^{-x}-2$ و (C_f) متقاربان عند $-\infty$ ثم ادرس وضعية (C_f) بالنسبة (γ)

3) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x لدينا: $f'(x)=\dfrac{-g(-x)}{x^2}$

4) استنتج أن الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $\left]-1;0\right[$ و $\left]0;+\infty\right[$ ومتناقصة تماما على المجال $\left]-\infty;-1\right[$

ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

5) بين كيف يمكن إنشاء المنحنى (γ) انطلاقا من منحنى الدالة $x \to e^x$ ثم ارسم كلا من المنحنيين (γ) و (C_f) في نفس المعلم السابق

التمرين 39: دورة 2016 العادية

$I-$ g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1+(x^2+x-1)e^{-x}$

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

2) ادرس اتجاه تغير الدالة g وشكل جدول تغيراتها

3) أ/ بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والأخر α ،حيث $-1,52<\alpha<-1,51$

ب/ استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

$II)$ نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=-x+(x^2+3x+2)e^{-x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) أ/ أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ب/ أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f'(x)=-g(x)$

ج/ شكل جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$ (نأخذ $f(\alpha)\approx 0,38$)

د/ عين دون حساب $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}$ وفسر هندسيا النتيجة

2) أ/ بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

ب/ أدرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ)

ج/ بين أن (C_f) يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيين احداثياهما

د/ ارسم (Δ) و (C_f) على المجال $\left[-2;+\infty\right[$

هـ/ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة

$(m-x)e^x+(x^2+3x+2)=0$ على المجال $\left[-2;+\infty\right[$

التمرين 40: دورة 2016 الاستثنائية

$I)$ لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=2e^x-x^2-x$

1) أ/ أحسب $g'(x)$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$، ثم ادرس اتجاه تغير الدالة g' (حيث g' هي مشتقة الدالة g)

ب/ بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $g'(x)>0$

ج/ أحسب نهايتي الدالة g عند $-\infty$ و $+\infty$ ، ثم شكل جدول تغيراتها

2) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد α ،حيث $-1,38<\alpha<-1,37$

3) استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x

II) لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\dfrac{x^2e^x}{e^x-x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) أ/ أحسب: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

ب/ بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x)=\dfrac{xe^xg(x)}{(e^x-x)^2}$ (حيث f' هي مشتقة الدالة f)

ج/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

2) أ/ بين أن: $f(\alpha)=\alpha^2+2\alpha+2+\dfrac{2}{\alpha-1}$ ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$

ب/ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x^2\right]$ وفسر النتيجة بيانيا

ج/ ارسم المنحنى (C_f) (تعطى $f(\alpha)\approx 0,29$)

التمرين 41: دورة 2015

I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1-2x-e^{2x-2}$

1) ادرس اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$

2) بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ ،ثم تحقق أنّ: $0,36<\alpha<0,37$

3) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=xe^{2x+2}-x+1$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) أ/ أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f'(x)=e^{2x+2}g(-x)$

ب/ استنتج أن الدالة f متناقصة تماما على $]-\infty;-\alpha]$ ومتزايدة تماما على $[-\alpha;+\infty[$

2) أحسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$، ثم شكل جدول تغيراتها

3) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+x-1\right]$ ثم فسّر النتيجة هندسيا

4) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) الذي معادلته: $y=-x+1$

5) أنشئ (C_f) و (Δ) على المجال $\left]-\infty;-\dfrac{1}{2}\right]$ ، (نأخذ $f(-\alpha)\approx 0,1$)

التمرين 42: دورة 2013

I) f الدالة المعرفة على $]-\infty,1[$ بـ: $f(x)=\dfrac{x}{x-1}+e^{\frac{1}{x-1}}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ،ثم استنتج المستقيمين المقاربين للمنحنى (C_f)

2) أحسب $f'(x)$. بين أن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty,1[$، ثم شكل

x	f(x)
0,20	0,037
0,21	0,016
0,22	-0,005
0,23	-0,026
0,24	-0,048
0,25	-0,070

جدول تغيراتها

3) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في $]-\infty,1[$ حلا وحيدا α. باستعمال جدول القيم أعلاه جد حصرًا للعدد α

4) ارسم المستقيمين المقاربين والمنحنى (C_f) ، ثم ارسم المنحنى (C') الممثل للدالة $|f|$

5) عين بيانيا مجموعة قيم الأعداد الحقيقية m التي من أجلها يكون للمعادلة $|f(x)|=m$ حلان مختلفان في الإشارة

II) g الدالة المعرفة على $]-\infty,1[$ بـ: $g(x)=f(2x-1)$ (عبارة $g(x)$ غير مطلوبة)

1) ادرس تغيرات الدالة g على $]-\infty,1[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

2) أ/ تحقق من أن: $g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)=0$ ، ثم بين أن: $g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)=2f'(\alpha)$

ب/ استنتج معادلة (T) المماس لمنحنى الدالة g في النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha+1}{2}$

ج/ تحقق من أن: $y=\frac{2}{(\alpha-1)^3}x-\frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$ ،معادلة للمستقيم (T)

التمرين 43: دورة 2012

$I-$ نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=1-xe^x$

1) احسب $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)$

2) ادرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها

3) أ/ بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على $]-1;+\infty[$

ب/ تحقق أن: $0,5<\alpha<0,6$ ،ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

$II-$ نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty;2[$ كما يلي: $f(x)=(x-1)e^x-x-1$ و (C_f) تمثيلها البياني.

1) أحسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

2) أ/ لتكن f' مشتقة الدالة f بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;2[$: $f'(x)=-g(x)$

ب/ استنتج إشارة $f'(x)$ على $]-\infty;2[$ ،ثم شكل جدول تغيراتها

3) بين أن $f(\alpha)=-\left(\frac{\alpha^2+1}{\alpha}\right)$ ثم جد حصرًا للعدد $f(\alpha)$ (تدور النتائج إلى 10^{-2})

4) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-x-1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$

5) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ)

6) بين أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث: $-1,6<\alpha<-1,5$ و $1,5<\beta<1,6$

7) أنشئ (Δ) و (C_f)

التمرين44: دورة 2011

الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=e^{x}-ex-1$

(C_f) منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) أ/احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

ب/ احسب $f'(x)$ ،ثم ادرس إشارتها

ج/ شكل جدول تغيرات الدالة f

2) أ/ بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة: $y=-ex-1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$

ب/ أكتب معادلة للمستقيم (T) مماس المنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة المعدومة.

3) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيدًا في المجال $]1,75;1,76[$

4) ارسم المستقيمين (Δ) ، (T) والمنحنى (C_f) في المجال $]-\infty;2]$

التمرين45: دورة 2010

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $f(x)=x-\dfrac{1}{e^{x}-1}$

نرمز بـ (C_f) منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) أحسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

2) أحسب $\lim_{x\overset{<}{\longrightarrow}0} f(x)$ و $\lim_{x\overset{>}{\longrightarrow}0} f(x)$. وفسر هندسيا النتيجة.

3) ادرس اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}^*$ ثم شكل جدول تغيراتها

4) أ/ بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ) و (Δ') معادلتيهما على

الترتيب: $y=x$ و $y=x+1$

ب/ أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى كل من (Δ) و (Δ')

5) أثبت أن النقطة $\omega\left(0\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f).

6) أ/ بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث: $\ln 2<\alpha<1$ و $-1,4<\beta<-1,3$

ب/ هل توجد مماسات لـ (C_f) توازي المستقيم (Δ) ؟

ج/ ارسم (Δ) ، (Δ') ثم المنحنى (C_f)

د/ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $(m-1)e^{-x}=m$

التمرين46: دورة 2009

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=x+\dfrac{2}{1+e^{x}}$.

(C_f) منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) أحسب $f(-x)+f(x)$ وماذا تستنتج ؟

2) ادرس تغيرات الدالة f على المجال $[0;+\infty[$ ،ثم استنتج جدول تغيراتها على $\mathbb{R}$

3) بين أن المستقيم $y=x$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f)

4) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+2)\right]$ ثم فسر النتيجة هندسيا

5) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $-1{,}7<\alpha<-1{,}6$

6) بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف ω يطلب تعيينها

7) بين أن (C_f) يقع في شريط حداه المستقيمان المقاربان، ثم ارسم المنحنى (C_f)

8) انطلاقا من المنحنى (C_f) اشرح كيفية الحصول على رسم المنحنى (C_g) الممثل للدالة g حيث $g(x)=f\left(\left|x\right|\right)$

ارسم عندئذ المنحنى (C_g)

التمرين 47: دورة 2008

$I-$ نعتبر الدالة f العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=(ax+b)e^{-x}+1$

حيث a و b عددان حقيقيان، (C_f) منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

عين قيمتي a و b بحيث تكون النقطة $A(-1;1)$ تنتمي إلى (C_f) ومعامل توجيه المماس عند A يساوي $-e$

$II-$ نعتبر الدالة g العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=(-x-1)e^{-x}+1$

(C_g) تمثيلها البياني في المعلم السابق

1) بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$ وفسر النتيجة هندسيا ($\lim\limits_{u\to-\infty} ue^{u}=0$)

2) ادرس تغيرات الدالة g ، ثم أنشئ جدول تغيراتها

3) بين أن (C_g) يقبل نقطة انعطاف I يطلب تعيينها

4) أكتب معادلة المماس للمنحنى (C_g) عند النقطة I

5) ارسم (C_g)

$III-$ k دالة معرفة على المجال $]-2;+\infty[$ بـ: $k(x)=g(x^2)$

باستعمال مشتقة دالة مركبة، عيّن اتجاه تغير الدالة k ثم شكل جدول تغيراتها

شعبة التقني رياضي

التمرين 48: دورة 2019

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = (x+3)e^x - 1$

(C_g) تمثيلها البياني كما هو مبين في الشكل.

بقراءة بيانية

أ) حدد اشارة $g(-1)$ و $g\left(-\frac{1}{2}\right)$

ب) استنتج وجود عدد حقيقي α وحيد من المجال $\left]-1;-\frac{1}{2}\right[$ بحيث $g(\alpha) = 0$

ثم تحقق أن: $-0,8 < \alpha < -0,7$

ج) استنتج اشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

$II-$ f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = (x+2)(e^x - 1)$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = g(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

3) أ/ أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x) + x\right]$ ثم استنتج أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلته

ب/ أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ)

ج) اكتب معادلة لـ (T) مماس (C_f) والموازي للمستقيم (Δ)

4) ارسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) على المجال $]-\infty;1]$ (يعطى $f(\alpha) \approx -0,7$)

5) h دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x) = \left|x\right|\left(e^{|x|-2} - 1\right)$ و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق

أ) بين أن الدالة h زوجية

ب) تأكد انه من أجل كل x من المجال $[0;+\infty[$ فان: $h(x) = f(x-2) + 1$

ج) اشرح كيف يمكن رسم (C_h) إنطلاقا من (C_f) ثم أرسم (C_h) على المجال $[-3;3]$

6) أثبت أن المنحنى (C_f) يقبل مماسًا وحيدًا (T) يوازي (Δ) يطلب تعيين معادلة له

7) باستعمال المنحنى (C_f)، عيّن قيم الوسيط الحقيقي m حتى يكون للمعادلة $f(x) = x + m$ حلين مختلفين

التمرين 49: دورة 2018

f الدالة العددية المعرفة على المجال $]-\infty;1[$ بـ: $f(x) = \dfrac{x}{x-1}e^{-x}$

(C_f) منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} f(x)$ ثم فسر النتيجة بيانيا واحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) بين أنه من أجل كل x من $]-\infty;1[$: $f'(x) = \dfrac{(-x^2+x-1)e^{-x}}{(x-1)^2}$ وادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

3) أ) اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة صفر

ب) h دالة عددية معرفة على المجال $]-\infty;1[$ بـ: $h(x) = e^{-x} + x - 1$

ادرس اتجاه تغير الدالة h ثم استنتج أنه من أجل كل x من $]-\infty;1[$: $h(x) \geq 0$

4) بين أنه من أجل كل x من $]-\infty;1[$: $f(x) + x = \dfrac{x.h(x)}{x-1}$ ثم استنتج الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمماس (T) وفسر النتيجة بيانيا

5) اكتب معادلة المستقيم (Δ) الذي يشمل مبدأ المعلم O والنقطة $A\left(-2;\dfrac{2}{3}e^2\right)$ ثم ارسم المستقيمين (T)، (Δ) والمنحنى (C_f) على المجال $\left[-2;1\right[$

6) ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f(x) = mx$ ، حيث $x \in \left[-2;1\right[$

التمرين 50: دورة 2017

$I-$ g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 1 - 2xe^{-x}$

– ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم استنتج إشارة $g(x)$

$II-$ f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = (x+1)(1+2e^{-x})$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) أ/ أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها

2) أ/ بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x) - x\right] = 1$ ثم استنتج معادلة لـ (Δ) المقارب المائل للمنحنى (C_f)

ب/ أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ)

3) أثبت أن المنحنى (C_f) يقبل مماسًا وحيدًا (T) يوازي (Δ) يطلب تعيين معادلة له

4) باستعمال المنحنى (C_f)، عيّن قيم الوسيط الحقيقي m حتى يكون للمعادلة $f(x) = x + m$ حلين مختلفين

التمرين 51: دورة 2015

$I)$ g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = (x+2)e^{x} - 2$

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

2) أدرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها

3) أحسب $g(0)$ ،ثم استنتج إشارة $g(x)$

$(II$ f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=2x+3-(x+1)e^{x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) بين أن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ ، ثم أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2) أ/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، : $f'(x)=-g(x)$

ب/ استنتج إشارة $f'(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

ج/ بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=2x+3$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى $\left(C_f\right)$ عند $-\infty$

ثم ادرس وضعية $\left(C_f\right)$ بالنسبة للمستقيم (Δ)

3) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث: $0{,}92<\alpha<0{,}93$ و $-1{,}56<\beta<-1{,}55$

4) أرسم المستقيم (Δ) ،ثم أنشئ المنحنى (C_f) على المجال $\left]-\infty;\frac{3}{2}\right]$

التمرين52: دورة 2014

$(I$ نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=(x-1)e^{x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) أحسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$

2) أدرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

3) بين أن المعادلة $f(x)=1$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ ثم تحقق أن $1{,}27<\alpha<1{,}28$

4) أكتب معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 وحدّد وضعية (C_f) بالنسبة إلى (T)

5) أنشئ المنحنى (C_f) والمماس (T)

6) عين قيم العدد الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة $(x-1)e^{x}-(m-1)e^{m}=-1$ تقبل حلا واحدا في $\mathbb{R}$

7) h هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $h(x)=\left(\left|x\right|+1\right)e^{-|x|}$ و (C_h) تمثيلها البياني

أ/ بين أن h دالة زوجية

ب/ ارسم (C_h) مستعينا بالمنحنى (C_f)

8) g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـــ : $g(x)=(ax+b)e^{x}$ حيث a و b عددان حقيقيان

عين a و b حتى يكون: من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $g'(x)=f(x)$

التمرين 53 دورة 2013

$I-$ الدالة g معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=(x-1)e^{x}$

1) ادرس تغيرات g

2) بين أنه، من أجل كل عدد حقيقي x : $1+(x-1)e^{x}\geq 0$

$II-$ الدّالة f معرفة على $[0;+\infty[$ كما يلي: $\begin{cases} f(x)=\dfrac{e^x-1}{x} & ;x>0 \\ f(0)=1 \end{cases}$

1) أ/ بيّن أن f مستمرة على $[0;+\infty[$

ب/ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) أ/ تحقق أنه، من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{1+(x-1)e^x}{x^2}$

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

$III)$ n عدد طبيعي حيث $n\geq 1$ ؛ f_n الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f_n(x)=\dfrac{e^x-1}{x}+n\ln x$

(C_n) منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) ادرس اتجاه تغير الدالة f_n على $]0;+\infty[$

2) احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f_n(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$

3) ادرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_n) و (C_{n+1})

4) بيّن أن جميع المنحنيات تمر من نقطة ثابتة B يطلب تعيين إحداثياتها

5) أ/ بيّن أنه، يوجد عدد حقيقي وحيد α_1 من $]0,3;0,4[$ بحيث: $f_1(\alpha_1)=0$

ب/ بيّن أنه، من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n\geq 1$ فانّ: $f_n(\alpha_1)<0$ ، ثم برهن أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α_n من $]\alpha_n;1[$ بحيث: $f_n(\alpha_n)=0$

التمرين 54: دورة 2012

$I-$ g هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=-4+(4-2x)e^x$.

1) ادرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

2) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما معدوم و الأخر α حيث: $1,59<\alpha<1,60$

3) استنتج إشارة $g(x)$

$II-$ f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{2x-2}{e^x-2x}$

(C_f) منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ (وحدة الطول $2cm$)

1) بين أن (C_f) يقبل عند $-\infty$ و $+\infty$ مستقيمين مقاربين معادلتاهما على الترتيب $y=-1$ و $y=0$

2) أ/ برهن انه من أجل كل عدد حقيقي x: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(e^x-2x)^2}$

ب/استنتج إشارة $f'(x)$ ،ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

ج/ احسب $f(1)$ ثم استنتج، حسب قيم x إشارة $f(x)$

3) أ/ بين أن: $f(\alpha)=-1+\dfrac{1}{\alpha-1}$ ، حيث α هو العدد المعرف في السؤال **2** من الجزء I

ب/ استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$ (تدور النتائج إلى 10^{-2})

ج/ ارسم (C_f)

4) ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $2x-2=(e^x-2x)(m+1)$

5) h هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x)=\left[f(x)\right]^2$

أ/ أحسب $h'(x)$ بدلالة كل من $f'(x)$ و $f(x)$ ، ثم استنتج إشارة $h'(x)$

ب/ شكل جدول تغيرات الدالة h

التمرين **55**: دورة **2011**

f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=3-\dfrac{4}{e^x+1}$

(C_f) منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) أدرس تغيرات الدالة f وعين المستقيمات المقاربة لـ (C_f)

2) بين أن للمنحنى (C_f) نقطة انعطاف ω يطلب تعيينها ،ثم أكتب معادلة لمماس (C_f) عندها

3) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=f(x)-x$

أ/ أحسب: $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$

ب/ بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g'(x)=\dfrac{-(e^x-1)}{(e^x+1)^2}$

ج/ أدرس إشارة $g'(x)$ ،ثم شكل جدول تغيرات g

د/ بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $2,7<\alpha<2,8$

4) أ/ حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $f(x)=0$

ب/ ارسم المماس والمستقيم (Δ) الذي معادلته: $y=x$ والمنحنى (C_f)

التمرين **56**: دورة **2010**

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{3xe^x-3x-4}{3(e^x-1)}$

(C_f) منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) عين العددين الحقيقيين a و b بحيث؛ $f(x)=ax+\dfrac{b}{3(e^x-1)}$ من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم

2) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to0} f(x)$

3) أثبت أن f متزايدة تماما على مجموعة تعريفها

4) أ/ (d) و (d') مستقيمان اللذان معادلتاهما على الترتيب $y = x$ و $y = x + \frac{4}{3}$ بيّن أن مقاربان لـ (C_f)

ثم حدد وضعيته بالنسبة لكل منهما

ب/ بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين x_1 و x_2 حيث: $0,9 < x_1 < 0,91$ و $-1,66 < x_2 < -1,65$

ج/ أحسب من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم؛ $f(-x) + f(x)$ ثم فسّر النتيجة هندسيا

5) ارسم (d) و (d') و (C_f)

6) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f(x) = x + m$

7) g الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x) = \left[f(x)\right]^2$

ادرس تغيرات الدالة g دون حساب $g(x)$ بدلالة x

التمرين 57: دورة 2009

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = x + \frac{2}{1+e^x}$.

(C_f) منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) أحسب $f(-x) + f(x)$ وماذا تستنتج؟

2) ادرس تغيرات الدالة f على المجال $]0;+\infty[$ ،ثم استنتج جدول تغيراتها على $\mathbb{R}$

3) بين أن المستقيم $y = x$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f)

4) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x) - (x+2)\right]$ ثم فسر النتيجة هندسيا

5) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $-1,7 < \alpha < -1,6$

6) بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف ω يطلب تعيينها

7) بين أن (C_f) يقع في شريط حداه المستقيمان المقاربان، ثم ارسم المنحنى (C_f)

8) انطلاقا من المنحنى (C_f) اشرح كيفية الحصول على رسم المنحنى (C_g) الممثل للدالة g حيث $g(x) = f\left(\left|x\right|\right)$

ارسم عندئذ المنحنى (C_g)

شعبة الرياضيات

التمرين 58: دورة2019

$I-$ نعتبر الدالة f_k المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f'(x)=(x+1)^2e^{-kx}$ حيث k وسيط حقيقي

(C_k) منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) بيّن أن جميع المنحنيات (C_k) تمر من نقطتين ثابتتين يطلب تعيينهما

2) أحسب نهايتي الدالة f_k عند $-\infty$ و $+\infty$ (ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي k)

3) أ) أحسب $f'_k(x)$. ثم حدد حسب قيم الوسيط الحقيقي k اتجاه تغير الدالة f_k

ب) شكل جدول تغيرات الدالة f_k من أجل k عدد حقيقي موجب تماما

4) ناقش وحسب قيم الوسيط الحقيقي k الأوضاع النسبية (C_k) و (C_{k+1})

$II-$ نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f'(x)=(x+1)^2e^{-2x}$

(C_f) منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) شكل جدول تغيرات الدالة f . ثم ارسم المنحنى (C_f) على المجال $\left[-\frac{3}{2};+\infty\right[$

2) أ) بيّن أن المعادلة $f(x)=1$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$ أحدهما α حيث: $-1,28<\alpha<-1,27$

ب)عيّن قيم العدد الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة $\left|\frac{x+1}{e^x}\right|=\left|\frac{m+1}{e^m}\right|$ حلا وحيدا.

التمرين 59: دورة2018

$I-$ g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=(1+x+x^2)e^{-\frac{1}{x}}-1$

1) بين أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $g'(x)=\frac{(x+1)(2x^2+1)}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$

واستنتج اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0;+\infty[$

2) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0,9<\alpha<1$ واستنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$

$II-$ نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f'(x)=\frac{1}{x}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}$

(C_f) منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) أ) احسب $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}f(x)$

ب) بين أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ واستنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

2) بين أن $\lim_{x\to+\infty}(xe^{-\frac{1}{x}}-x)=-1$ (يمكن وضـــع $t=-\frac{1}{x}$) ثم استنتج أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$

3) h الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $h(x)=\frac{1}{x}-1+e^{-\frac{1}{x}}$

أ) احسب $\lim_{x\to+\infty}h(x)$ وادرس اتجاه تغير الدالة h واستنتج إشارة $h(x)$ على المجال $]0;+\infty[$

ب) تحقق أن $f(x)-x=(1+x)h(x)$ ثم استنتج الوضعية النسبية لـ (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ)

4) ارسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f). (نأخذ $f(\alpha)\simeq 1,73$)

التمرين 60: دورة 2017 دورة عادية

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=(-x^3+2x^2)e^{-x+1}$

(C_f) منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) أ/ أحسب: $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ استنتج وجود مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) يطلب تعيين معادلة له

ب/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=x(x^2-5x+4)e^{-x+1}$

ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

2) اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 2

3) h الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $h(x)=x^2e^{-x+2}-4$

ادرس اتجاه تغير الدالة h ثم استنتج إشارة $h(x)$ حدد عندئذ وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (T) على المجال $]0;+\infty[$

4) ارسم المماس (T) والمنحنى (C_f) على المجال $]0;+\infty[$

5) نعتبر الوسيط الحقيقي m والمعادلة ذات المجهول الحقيقي x الموجب: $(E)...f(x)=m(x-2)$

ناقش بيانيا حسب قيم m عدد حلول المعادلة (E)

6) g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$

اعتمادا على السؤال رقم (1) شكل جدول تغيرات الدالة g

التمرين 61: دورة 2017 الدورة الاستثنائية

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\|=1cm$

$I-$ f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=(x+1)^2e^{-x}$ و (C) تمثيلها البياني

1) احسب: $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty}f(x)$

2) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

3) أثبت أن المنحنى (C) يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيين احداثييهما، أحسب $f(-2)$ وارسم (C)

$II-$ ليكن m وسيط حقيقي، نعتبر الدالة العددية f_m المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=(x^2+mx+1)e^{-x}$

و (C_m) تمثيلها البياني في المعلم السابق

1) أثبت أن جميع المنحنيات (C_m) تشمل نقطة ثابتة ω يطلب تعيين احداثييها

2) أدرس اتجاه تغير الدّالة f_m واستنتج قيم m التي من أجلها تقبل الدّالة f_m قيمتين حديتين يطلب تعيينهما

3) M_m نقطة من (C_m) فاصلتها x_m حيث $x_m = 1 - m$

أثبت أنه عندما m يمسح $\mathbb{R}$ فان M_m تنتمي إلى منحنى يطلب تعيينه

4) أدرس حسب قيم الوسيط m حيث $m \neq 0$ الوضعية النسبية للمنحنيين (C) و (C_m)

التمرين 62: دورة 2016

$I-$ φ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $\varphi(x) = (x^2 - x + 1)e^{-x+1} - 1$

1) أ/ أحسب: $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x)$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x)$

ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة φ ، ثم شكل جدول تغيراتها

2) بيّن أن المعادلة $\varphi(x) = 0$ تقبل في $\mathbb{R}$ ، حلا α يختلف عن 1 ثم تحقق أن $2,79 < \alpha < 2,80$

3) استنتج إشارة $\varphi(x)$ على $\mathbb{R}$

$II-$ f و g الدالتان العدديتان المعرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = (2x-1)e^{-x+1}$ و $g(x) = \dfrac{2x-1}{x^2 - x + 1}$

(C_f) و (C_g) تمثيلاهما البيانيان في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

1) أ/ أحسب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

2) بين أن للمنحنيين (C_f) و (C_g) مماسا مشتركا (T) عند النقطة ذات الفاصلة 1 ثم جد معادلة له

3) ارسم المماس (T) والمنحنى (C_f)

4) أ/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x) - g(x) = \dfrac{(2x-1)\varphi(x)}{x^2 - x + 1}$

ب/ ادرس إشارة الفرق $f(x) - g(x)$ ثم استنتج الوضع النسبي لـ (C_f) و (C_g)

التمرين 63: دورة 2015

f الدالة المعرفة بـ: $f(0) = 0$ ومن أجل كل عدد حقيقي x من المجال $\left]-\infty; 0\right[$ ، $f(x) = (x-1)e^{\frac{1}{x}}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

1) ادرس استمرارية الدالة f عند 0 من اليسار

2) أحسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} \dfrac{f(x)}{x}$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا

3) أ/ أحسب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

4) أ/ بين أن $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-x\right]=0$

ب/ استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) بجوار $-\infty$ ،يطلب تعيين معادلة له

5) g الدالة المعرفة على المجال $\left]-\infty;0\right[$ بـ: $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$

أ/ أحسب $\lim_{x\to-\infty} g(x)$

ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة g ،ثم شكل جدول تغيراتها

6) أ/ بين أنه من أجل كل x من المجال $\left]-\infty;0\right[$ ، $f(x)>x$

ب/ ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ)

ج/ أنشئ المنحنى (C_f)

التمرين 64: دورة 2014

$I)$ نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=(2-x)e^x-1$

1) أدرس تغيرات الدالة g

2) بين أن للمعادلة : $g(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث: $-1{,}2<\alpha<-1{,}1$ و $1{,}8<\beta<1{,}9$

3) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

$II)$ f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) أحسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$ وفسر النتيجتين هندسيا

2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(e^x-x)^2}$ واستنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

3) بين أن : $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha-1}$ واستنتج حصرا للعددين $f(\alpha)$ و $f(\beta)$

4) احسب $f(1)$ ثم ارسم المنحنى (C_f)

التمرين 65: دورة 2013

$I-$ نعتبر الدالة u المعرفة على المجال $\left]0,+\infty\right[$ كما يلي: $u(x)=e^x-3x+4-e$

1) أ/ ادرس اتجاه تغير الدالة u

ب/ بين أنه، من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $\left]0,+\infty\right[$ ، $e^x-e>3x-4$

2) الدالة v معرفة على المجال $\left]0,+\infty\right[$ بـ: $v(x)=-3x^3+4x^2-1+\ln x$

أ/ بين أن : $v'(1)=0$. (يرمز v' إلى الدالة المشتقة للدالة v)

ب/ أثبت أنه، من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $\left]0,+\infty\right[$ ، $v(x)\leq 0$

ج/استنتج، أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $\left]0,+\infty\right[$ ، $\dfrac{-1+\ln x}{x^2}\leq 3x-4$

3) أثبت أنه، من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $\left]0,+\infty\right[$: $e^x-e+\dfrac{1-\ln x}{x^2}>0$

II) الدالة f معرفة على المجال $\left]0,+\infty\right[$ بـ: $f(x)=e^x-ex+\dfrac{\ln x}{x}$

(C_n) منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) احسب، $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) بين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $\left]0,+\infty\right[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها

3) احسب $f(1)$ ، ثم مثل المنحنى (C_f) على المجال $\left]0,\dfrac{5}{2}\right]$

(نأخذ: $f(2)\approx 2,3$ ، $f(1,64)\approx 1$ و $f\left(\dfrac{5}{2}\right)\approx 5,75$)

التمرين 66: دورة 2012

$I-$ g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=2-xe^x$

1) ادرس تغيرات الدالة g ،ثم شكل جدول تغيراتها

2) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0,8<\alpha<0,9$

3) استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$

$II-$ نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{2x+2}{e^x+2}$ ط

(C_f) منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا

2) أ/ أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

ب/ بين أن المستقيم (Δ') ذا المعادلة $y=x+1$ مقارب لـ (C_f)

3) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) و (Δ') حيث (Δ) هو المستقيم ذا المعادلة $y=x$

4) أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=\dfrac{2\,g(x)}{(e^x+2)^2}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f

5) بين أن $f(\alpha)=\alpha$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

6) ارسم (Δ') و (Δ) و (C_f)

7) ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ،عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x)=f(m)$

التمرين 67: دورة 2011

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\left(3x+4\right)e^{x}$

(C_f) منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) أ/ احسب f' و f'' ،ثم برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم؛فان $f^{(n)}(x)=\left(3x+3n+4\right)e^{x}$ حيث: $f^{(n)},...,f'',f'$ المشتقات المتتابعة للدالة f

ب/ استنتج حل المعادلة التفاضلية: $y''=(3x+16)e^{x}$

2) أ/ بيّن أن $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$ وفسر النتيجة هندسيا

ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ،ثم شكل جدول تغيراتها

3) أ/ أكتب معادلة للمماس (Δ) للمنحنى (C_f) عند النقطة ω التي فاصلتها $\dfrac{-10}{3}$

ب/ برهن أن النقطة ω هي نقطة انعطاف المنحنى (C_f)

4) ارسم (Δ) و (C_f) على المجال $\left]-\infty;0\right]$

التمرين 68: دورة 2010

$I-$ الدالة g معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=(3-x)e^{x}-3$

1) ادرس تغيرات الدالة g

2) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين مختلفين أحدهما معدوم والأخر $\alpha\in\left]2,82\;;\;2,83\right[$

3) استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x

$II-$ الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $\begin{cases}f(x)=\dfrac{x^{3}}{e^{x}-1} & ;x\neq0\\ f(0)=0\end{cases}$ (C_f) تمثيلها البياني

1) بين أن f قابلة للاشتقاق عند $x_0=0$ وأكتب معادلة لـ (T) مماس (C_f) عند 0

2) أ/ بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{3}e^{-x}=0$ ثم جدّ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

ب/ بين أنه، من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم : $f'(x)=\dfrac{x^{2}}{(e^{x}-1)^{2}}g(x)$

ج/ تحقق أن: $f(\alpha)=\alpha^{2}(3-\alpha)$ ،ثم عيّن حصرا له

د/ أنشئ جدول تغيرات f

3) احسب $f(x)+x^{3}$ واستنتج الوضع النسبي لـ (C_f) و (C) منحنى الدالة $x\mapsto-x^{3}$

4) بين أن $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+x^3\right]=0$ وفسر النتيجة هندسيا

5) أنشئ في نفس المعلم المماس (T) و (C) و (C_f)

التمرين 69: دورة 2008

f (I هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=x-1+\dfrac{4}{e^x+1}$

(C_f) منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) ادرس تغيرات الدالة f

2) بين أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف ω واكتب معادلة لمماس (C_f) عند النقطة ω

3) اثبت أن ω مركز تناظر للمنحنى (C_f)

4) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+3)\right]$ ، ماذا تستنتج ؟

5) بين أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 من المجال $\left]-2,77\ ;\ -2,76\right[$

6) احسب $f(1)$ و $f(-1)$ (تدور النتائج إلى 10^{-2}) ثم ارسم (C_f) ومستقيميه المقاربين

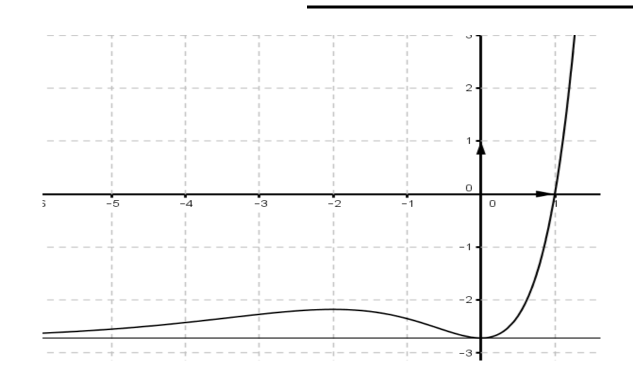
g (II الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=-x+3-\dfrac{4}{e^x+1}$. (C_g) منحنى الدالة g

1) بين أن من اجل كل عدد حقيقي x فان: $g(x)=f(-x)$

2) أنشئ في نفس المعلم السابق (C_g) (دون دراسة الدالة g)

قف عنـــد ناصيـــة الحلـــم وقاتل

المحطـــــة السادسة :(حلول نموذجية لبعض التمارين)



التمرين 38: دورة 2017 الاستدراكية

I- g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = x^2e^x - e$

- حساب $g(1)$: $g(1) = 1^2 \times e^1 - e = e - e = 0$

- **بقراءة بيانية**

تعيّين إشارة $g(x)$

x	$-\infty$ 1 $+\infty$
$g(x)$	$-$ 0 $+$

استنتاج إشارة $g(-x)$: ملحوظة؛ لما $x > 1$ فان $-x < -1$ وعليه نقوم بعكس إشارة $g(x)$ نتحصل على إشارة $g(-x)$ وأيضا يصبح الانعدام عند -1 كما يوضحه الجدول التالي

x	$-\infty$ -1 $+\infty$
$g(-x)$	$+$ 0 $-$

II- f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x) = e^{-x} - 2 - \frac{e}{x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

1) حساب النهايات الأتية: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ ، $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to-\infty} \underbrace{e^{-x}}_{+\infty} - 2 - \frac{e}{\underbrace{x}_{0}} = +\infty - 2 = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty} \underbrace{e^{-x}}_{0} - 2 - \frac{e}{\underbrace{x}_{0}} = -2$$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \underbrace{e^{-x} - 2}_{-1} - \frac{e}{x} = -1 - \frac{e}{\underbrace{{}^{+}0}_{+\infty}} = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \xrightarrow{<} 0} \underbrace{e^{-x} - 2}_{-1} - \frac{e}{x} = -1 - \frac{e}{\underbrace{{}^{-}0}_{-\infty}} = +\infty$$

2) تبيان أن المنحنى (γ) الذي معادلته $y = e^{-x} - 2$ و (C_f) متقاربان عند $-\infty$

نبين أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x) - y\right] = 0$: لدينا $f(x) - y = e^{-x} - 2 - \frac{e}{x} - e^{-x} + 2 = \frac{-e}{x}$ ومنه

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x) - y\right] = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-e}{x} = 0$ وبالتالي (γ) و (C_f) متقاربان عند $-\infty$

✓ دراسة وضعية (C_f) بالنسبة (γ)؛ ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$: مما سبق $f(x)-y=\dfrac{-e}{x}$

x	$-\infty$ 0 $+\infty$	
$-e$	$-$	$-$
x	$-$ 0	$+$
$f(x)-y$	$+$ ‖	$-$

(C_f) فوق (γ) على المجالين $]-\infty;0[$
(C_f) تحت (γ) على المجال $]0;+\infty[$

3) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x لدينا: $f'(x)=\dfrac{-g(-x)}{x^2}$

f قابله للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ ؛

ولدينا $f'(x)=-e^{-x}+\dfrac{e}{x^2}=\dfrac{-x^2e^{-x}+e}{x^2}=\dfrac{-(x^2e^{-x}-e)}{x^2}=\dfrac{-(\overbrace{(-x)^2e^{-x}-e}^{g(-x)})}{x^2}=\dfrac{-g(-x)}{x^2}$

4) استنتج أن الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $]-1;0[$ و $]0;+\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty;-1[$

بما أنّ $f'(x)=\dfrac{-g(-x)}{x^2}$ فان إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط "$-g(-x)$" المعاكسة لإشارة $g(-x)$ وعليه تكون إشارة $f'(x)$ كما يلي

x	$-\infty$ -1 0 $+\infty$		
$f'(x)$	$-$ 0	$+$ ‖	$+$

ومنه: الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $]-1;0[$ و $]0;+\infty[$ (لان $f'(x)>0$ على هذين المجالين) ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty;-1[$ (لان $f'(x)<0$ على هذا المجال)

✓ جدول تغيرات الدالة f

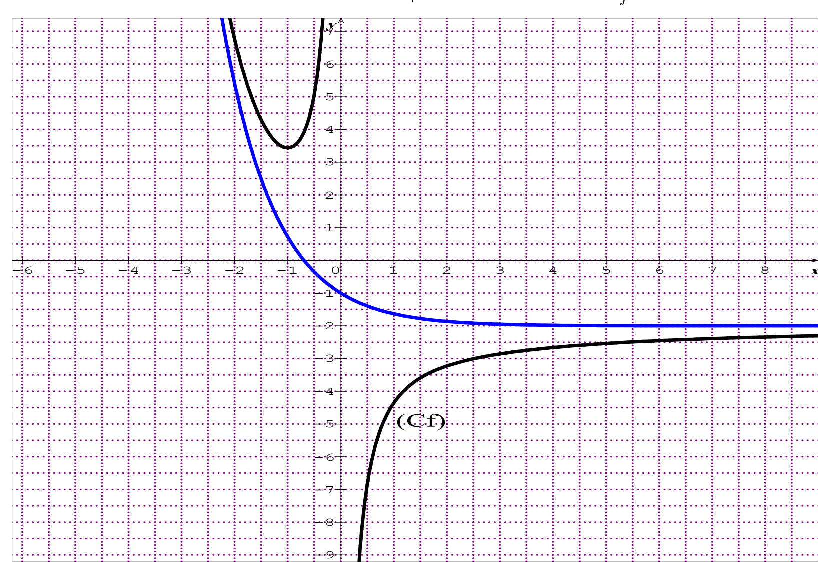
x	$-\infty$ -1 0 $+\infty$		
$f'(x)$	$-$ 0	$+$ ‖	$+$
f	$+\infty$ ↘ $2e-2$	↗ $+\infty$ ‖	$-\infty$ ↗ -2

5) تبيان كيف يمكن إنشاء المنحنى (γ) انطلاقا من منحنى الدالة $x\to e^x$

المنحنى (γ) هو صورة منحنى الدالة $x\to e^{-x}$ بالانسحاب الذي شعاعه $-2\vec{j}$

ومنحنى الدالة $x\to e^{-x}$ هو نظير المنحنى $x\to e^x$ بالنسبة إلى حامل محور التراتيب

✓ رسم كلا من المنحنيين (γ) و (C_f) في نفس المعلم السابق



التمرين 05: بكالوريا تونس2008

$I-$

1) حساب $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 0} x - \frac{1}{e^x - 1} = 0 - \frac{1}{0^-} = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \xrightarrow{>} 0} x - \frac{1}{e^x - 1} = 0 - \frac{1}{0^+} = -\infty$$

تُفسّر النهايتين: $x = 0$ مقارب عمودي لـ (C_f)

2) دراسة تغيرات الدالة f

*/ نكمل حساب النهايات عند $-\infty$ و $+\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} x - \frac{1}{\underbrace{e^x}_{=0} - 1} = -\infty + 1 = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} x - \frac{1}{\underbrace{e^x - 1}_{+\infty}} = +\infty + 0 = +\infty$$

*/ نحسب $f'(x)$ ؛ f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ ولدينا: $f'(x) = 1 + \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} > 0$

ومنه جدول التغيرات يكون كالتالي:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

3) واضح

*/ إثبات أن؛ $f'(\alpha) = 1 + \alpha + \alpha^2$

لدينا $f'(\alpha) = 1 + \frac{e^\alpha}{(e^\alpha - 1)^2}$ .....(1)

نبحث عن علاقة تعوض e^α

لدينا $f(\alpha) = \alpha - \frac{1}{e^\alpha - 1} = 0 \Rightarrow e^\alpha = \frac{\alpha + 1}{\alpha}$ ...(2)

نعوض(2) في (1) نجد $f'(\alpha)=1+\dfrac{\dfrac{\alpha+1}{\alpha}}{\left(\dfrac{\alpha+1}{\alpha}-1\right)^2}=1+\dfrac{\dfrac{\alpha+1}{\alpha}}{\dfrac{1}{\alpha^2}}=1+\alpha+\alpha^2$ (و.هـ .م)

4) كتابة معادلة للمماس (T) لـ في النقطة $A\left(\alpha;f(\alpha)\right)$

$y=f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)$ وبما أن $f'(\alpha)=1+\alpha+\alpha^2$ و $f(\alpha)=0$ فان

$$y=\left(1+\alpha+\alpha^2\right)\left(x-\alpha\right)=\left(1+\alpha+\alpha^2\right)x-\left(\alpha+\alpha^2+\alpha^3\right)$$

5) حساب؛ $f(-x)+f(x)$

$$f(-x)+f(x)=-x-\frac{1}{e^{-x}-1}+x-\frac{1}{e^x-1}=\frac{e^x}{e^x-1}-\frac{1}{e^x-1}=\frac{e^x-1}{e^x-1}=1$$

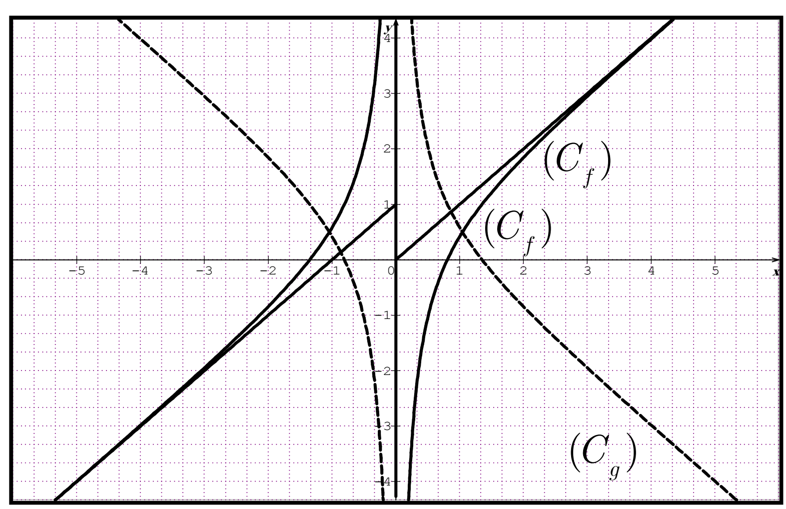
*/ التفسير الهندسي: نطابق بين الحالة العامة $f(2\alpha-x)+f(x)=2\beta$ مع الحالة الخاصة $f(-x)+f(x)=1$

نجد $\alpha=0$ و $\beta=\dfrac{1}{2}$ ومنه النقطة $A\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ هي مركز تناظر لـ (C_f)

6) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-x-1\right]=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=0$

*/ تُفسّر هندسيا: $(\Delta):y=x+1$ و $(\Delta'):y=x$ مستقيمان مقاربان مائلان لـ (C_f) بجوار $-\infty$ و $+\infty$ على التوالي

7) إنشاء (T) و (C_f) نأخذ $\alpha\approx0,8$



8) لا توجد

*/ التبرير: المعادلة $f'(x_0)\times1=-1$ لا تقبل حلول في $\mathbb{R}$: $1+\dfrac{e^x}{(e^x-1)^2}=1\Rightarrow\dfrac{e^x}{(e^x-1)^2}=0$

9) حلول هذه المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم المائل ذا المعادلة؛ $y=x+m$ الموازي لـ(Δ) و (Δ') وعليه نقارن m مع 0 و 1

*/ $m<0$ يوجد حل وحيد موجب

*/ $0 \leq m \leq 1$ لا توجد حلول

*/ $m > 1$ يوجد حل وحيد سالب

$II-$ g دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $g(x) = -x + \dfrac{e^x}{e^x + 1}$

*/تبيان أن : $g(x) = f(-x)$: $f(-x) = -x - \dfrac{1}{e^{-x} - 1} = -x - \dfrac{1 \times e^x}{(e^{-x} - 1) \times e^x} = -x + \dfrac{e^x}{e^x - 1} = g(x)$

رسم : (C_g) هو نظير (C_f) بالنسبة إلى حامل محور الفواصل

التمرين 06: الامتحان الأول ثانوية بوشوشة 2010 /2011

بقراءة بيانية

1) حساب $g(-1)$ ، $g(0)$ و $g'(0)$

$g(-1) = 0$ ، $g(0) = 1$ أما $g'(0)$ تمثل ميل مماس المنحنى (C_g) عند $x_0 = 0$ وعليه نختار نقطتين من المماس

مثلا $(0;1)$ و $(1;0)$ وعليه $g'(0) = \dfrac{1-0}{0-1} = -1$ ومنه $g'(0) = -1$

2) إيجاد معادلة المماس لـ (C_g) عند النقطة ذات الفاصلة 0

$y = g'(0)(x - 0) + g(0)$ ومما سبق $g(0) = 1$ و $g'(0) = -1$ وبالتالي $y = -x + 1$

3) $g(x) = 0$ معناه فواصل النقط التي يقطع فيها المنحنى (C_g) حامل محور الفواصل وعليه للمعادلة حلين هما

$x_1 = -1$ و $x_2 = 1$

*/ جدول إشارة الدالة g

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

4) باستعمال المعطيات السابقة تحقق أن: $g(x) = (1 - x^2)e^{-x}$

$g(-1) = (1 + a)e^{-b} = 0 \Rightarrow 1 + a = 0 \Rightarrow a = -1$

نحسب $g'(x)$ بدلالة a و b : $g'(x) = 2ax \times e^{bx}.b \times (1 + ax^2)e^{bx} = (b + 2ax + abx^2)e^{bx}$

ولدينا $g'(0) = -1 \Rightarrow be^0 = -1 \Rightarrow b = -1$ وبالتالي: $g(x) = (1 - x^2)e^{-x}$

$II-$

1) حساب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$: بما أن $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} (x+1)^2 = +\infty$ فان $\lim\limits_{x \to -\infty} (x+1)^2 e^{-x} = +\infty$

*/ إثبات أن: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

بما أن $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} (x+1)^2 = +\infty$ فان $\lim\limits_{x \to +\infty} (x+1)^2 e^{-x} = 0 \times (+\infty)$ حالة عدم تعيين

رفعها: النشر فقط $\lim\limits_{x \to +\infty} (x+1)^2 e^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 e^{-x} 2xe^{-x} + e^{-x} = 0$ لان $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n e^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^n}{e^x} = 0$

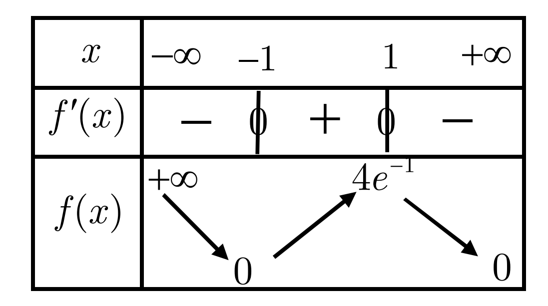
تفسر هندسيا: ؛ $y=0$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$

2) أ/ تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $f'(x)=g(x)$: f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا؛

$$f'(x)=2(x+1).e^{-x}+(x+1)^2(-e^{-x})=(2x+2-x^2-2x-1)e^{-x}=(1-x^2)e^{-x}=g(x)$$

ب/ استنتاج اتجاه تغير الدالة f : إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

وعليه يكون جدول التغيرات كالتالي



x	$-\infty$ -1 1 $+\infty$
$f'(x)$	$-$ 0 $+$ 0 $-$
$f(x)$	$+\infty$ ↘ 0 ↗ $4e^{-1}$ ↘ 0

3) أ/ تعيّن دون حساب $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x)}{x+1}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=g(0)=1$$

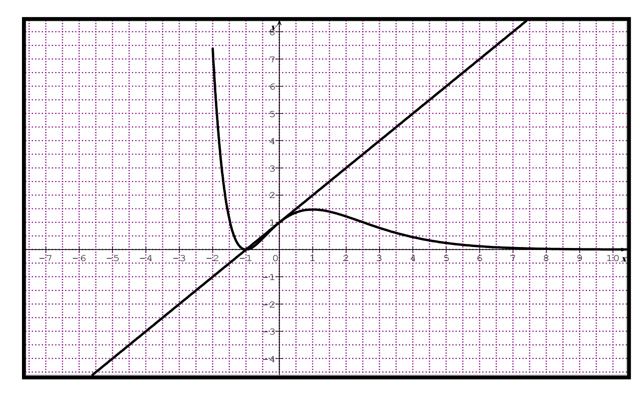
تُفسّر هندسيا: (C_f) يقبل مماسا أفقيا عند الفاصلة المعدومة

ميله (معامل توجيهه) يساوي 1

ب/ استنتاج معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند $x_0=0$ مما سبق: $f'(0)=1$ و $f(0)=1$

$y=f'(0)(x-0)+f(0)$ ومنه $(T): y=x+1$

4) إنشاء المنحنى (C_f) والمماس (T) على المجال $]-1;+\infty[$



5) مناقشة بيانية لحلول المعادلة: $f(x)=-m$

حلول هذه المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم الأفقي ذا المعادلة $y=-m$ وعليه

*/ $-m<0 \Leftarrow m>0$ لا يوجد حلول

*/ $-m=0 \Leftarrow m=0$ يوجد حل مضاعف سالب

*/ $0<-m<1 \Leftarrow 0>m>-1$ يوجد ثلاث حلول حلان سالبان وحل موجب

*/ $1<-m<4e^{-1} \Leftarrow -4e^{-1}<m<-1$ يوجد ثلاث حلول حلان موجبان وحل سالب

*/ $-m = 4e^{-1} \Leftarrow m = -4e^{-1}$ يوجد حلان احدهما مضاعف موجب وحل سالب

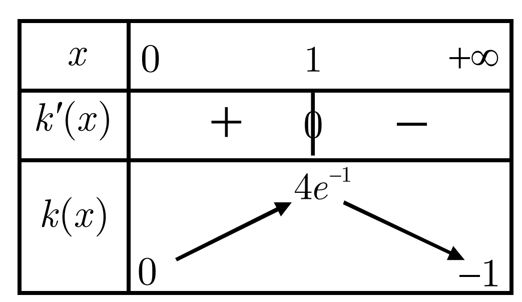
*/ $-m > 4e^{-1} \Leftarrow m = -4e^{-1}$ يوجد حل وحيد سالب

$III-$ k دالة معرفة على $\left]0;+\infty\right[$ بـ: $k(x) = f(x^2) - 1$

*/ لدينا: $k'(x) = 2x.f'(x^2)$ وبالتالي إشارة $k'(x)$ من إشارة $f'(x^2)$ لان $2x$ موجب على $\left]0;+\infty\right[$

لدينا: $k(0) = f(0) - 1 = 0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x^2) - 1\right] = -1$ ، $k(1) = f(1) = 4e^{-1}$

*/ جدول التغيرات



x	0		1		$+\infty$
$k'(x)$		$+$	0	$-$	
$k(x)$	0	↗	$4e^{-1}$	↘	-1

التمرين 07: الامتحان الأول ثانوية بوشوشة 2014 /2015

$I-$

1) حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

*/ بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x+1 = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ فان $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = (-\infty).0$ (ح ع ت)

رفعها: النشر؛ $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x+1)e^x - 1 = \lim\limits_{x\to-\infty} 2\underbrace{xe^x}_{=0} + \underbrace{e^x}_{=0} - 1 = -1$

*/ بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x+1 = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ فان $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

2) دراسة اتجاه تغير الدالة g

*/ نحسب $g'(x)$ ؛ g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا: $g'(x) = 2e^x + (2x+1)e^x = (2x+3)e^x$

*/ إشارة $g'(x)$ من إشارة $2x+3$ لان $e^x > 0$ مهما كان x من $\mathbb{R}$ وبالتالي نحل المعادلة $2x+3=0$

$2x+3=0 \Rightarrow x = -\dfrac{3}{2}$ وتكون إشارة $g'(x)$ كما في الجدول

x	$-\infty$		$-1,5$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

g متزايدة تماما على المجال $\left]-1,5;+\infty\right[$ ومتناقصة تماما على المجال $\left]-\infty;-1,5\right[$

جدول التغيرات

x	$-\infty$		$-1,5$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$			
$g(x)$	-1	↘	$8e^{-1}$	↗	0	↗	$+\infty$

3) حساب $g(0)$: $g(0)=0$

تحديد إشارة $g(x)$

x	$-\infty$ $\quad$ 0 $\quad$ $+\infty$
$g(x)$	$-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$

$II-$ نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x.(1-e^x)^2$

1) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty}(1-e^x)^2=1$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$ فان $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-e^x)^2=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ فان $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

2) أ/ تبيان أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة : $y=x$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$

نبين أن: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-x\right]=0$ ، لدينا: $f(x)-x=x.(1-e^x)^2-x=-2xe^x+xe^{2x}$ ومنه

$\lim\limits_{x\to-\infty}(-2\underbrace{xe^x}_{=0}+\underbrace{xe^{2x}}_{=0})=0$ وعليه $y=x$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$

ب/ دراسة الوضع النسبي لـ (Δ) مع (C_f)

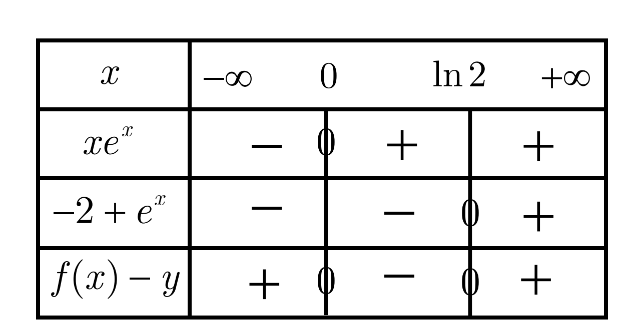
ندرس إشارة الفرق: $f(x)-y$ لدينا مما سبق؛ $f(x)-x=-2xe^x+xe^{2x}=xe^x(-2+e^x)$

نحل المعادلة: $xe^x(-2+e^x)=0$

إما $xe^x=0$ معناه $x=0$ لان: $e^x\neq 0$

أو $-2+e^x=0 \Leftarrow e^x=2$ أي $x=\ln 2$

والإشارة من إشارة الجداء:



x	$-\infty$	0		$\ln 2$		$+\infty$
xe^x	$-$	0	$+$		$+$	
$-2+e^x$	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)-y$	$+$	0	$-$	0	$+$	

(C_f) فوق (Δ) على المجالين $\left]-\infty;0\right[$ و $\left]\ln 2;+\infty\right[$
(C_f) تحت (Δ) على المجال $\left]0;\ln 2\right[$
(C_f) يقطع (Δ) عند النقطتين $A(0;0)$ و $B(\ln 2;\ln 2)$

3) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ ؛ $f'(x)=(e^x-1)g(x)$

$$f'(x)=(1-e^x)^2+2x(1-e^x)(-e^x)=(1-e^x)\left[(1-e^x)-2xe^x\right]=(1-e^x)\left[1-(2x-1)e^x\right]$$
$$=(e^x-1)\left[(2x-1)e^x-1\right]=(e^x-1).g(x)$$

4) استنتاج إشارة $f'(x)$ ؛ إشارة $f'(x)$ من إشارة الجداء e^x-1 و $g(x)$

$x=0 \Rightarrow e^x-1=0$ و $g(x)$ إشارتها مما سبق وعليه تكون الإشارة كالتالي

x	$-\infty$ $\quad$ 0 $\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

5) إثبات أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف ω يطلب تعيين إحداثياتها

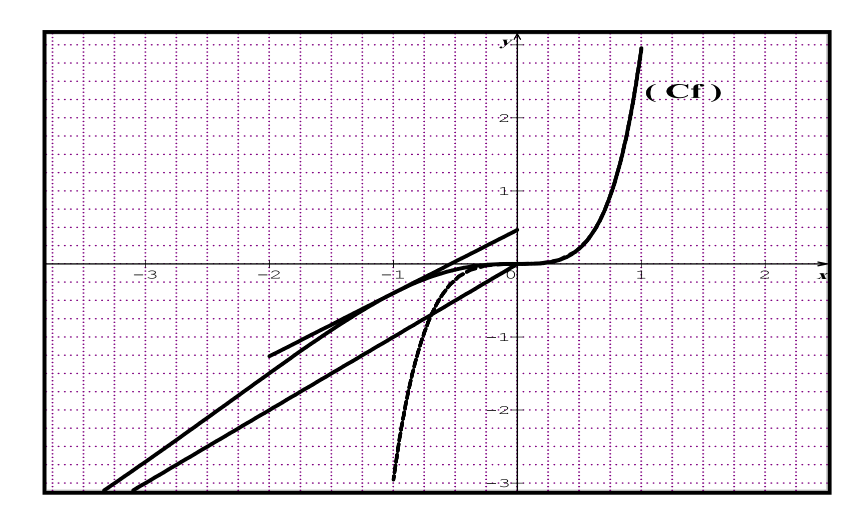
لدينا المشتقة الأولى تنعدم عند 0 ولا تغير إشارتها وبالتالي النقطة $\left(0;f(0)=0\right)$ هي نقطة انعطاف للمنحنى $\left(C_f\right)$

6) كتابة معادلة للمماس (T) للمنحنى $\left(C_f\right)$ عند النقطة ذات الفاصلة -1

بصفة عامة: $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ **وبصفة خاصة** $y=f'(-1)(x+1)+f(-1)$

$$\begin{cases} f(-1)=-1+2e^{-1}-e^{-2} \\ f'(-1)=-e^{-2}+1 \end{cases} \Rightarrow y=(-e^{-2}+1)x-2(e^{-2}-e^{-1})$$

7) إنشاء المنحنى $\left(C_f\right)$ على المجال $\left]-\infty;1\right]$ ، (Δ) و (T)



III- h دالة معرّفة على $\left[-1;1\right]$ بـ: $h(x)=x.\left(1-e^{|x|}\right)^2$

1) دراسة قابلية اشتقاق الدالة h عند الصفر

$$\lim_{x\xrightarrow{<}0}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=\lim_{x\xrightarrow{<}0}\frac{x.(1-e^{-x})^2}{x}=\lim_{x\xrightarrow{<}0}(1-e^{-x})^2=0$$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{x.(1-e^{x})^2}{x}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}(1-e^{x})^2=0$$

ومنه h قابلة للاشتقاق عند الصفر

2) أ/ تبيان أن h دالة فردية؛ نبين أن $h(-x)=-h(x)$

$h(-x)=-x.\left(1-e^{|-x|}\right)^2=-x.\left(1-e^{|x|}\right)^2=-h(x)$ لان $|x|=|-x|$

ب/ استنتاج طريقة لرسم منحناها دون دراسة تغيراتها؛ على المجال $\left[0;1\right]$ لدينا: $|x|=x$ ومنه $h(x)=f(x)$ على هذا المجال ومنه $\left(C_h\right)$ منطبق على $\left(C_f\right)$ ونكمل الرسم بالتناظر مع المبدأ O لان h دالة فردية

3) إنشاء منحنى الدالة h في نفس المعلم السابق (الخط المتقطع)

التمرين 11:

1) حساب؛ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$: $\lim\limits_{x\to-\infty} x\underbrace{e^{\frac{1}{x}}}_{=1} = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} x\underbrace{e^{\frac{1}{x}}}_{=1} = +\infty$

2) حساب: $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$

$$\lim_{x\xrightarrow{<}0} xe^{\frac{1}{x}} = 0.e^{\frac{1}{0^-}=-\infty} = 0$$ تُفسر هندسيا؛ النقطة $(0;0)$ نقطة نهاية

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0} xe^{\frac{1}{x}} = 0.e^{\frac{1}{0^+}=+\infty} = 0.+\infty$$ حالة عدم تعيين

رفعها: $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} xe^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}$ نضع ؛ $t=\dfrac{1}{x}$ لدينا $x \to 0^+$ فان $t \to +\infty$ وتصبح النهاية كالتالي

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0} x\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to+\infty}\frac{e^t}{t} = +\infty$$ تُفسّر هندسيا؛ المستقيم ذا المعادلة $x=0$ مقارب عمودي لـ (C_f)

3) أ/ برهان أن: $\lim\limits_{|x|\to+\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right) = 1$

$\lim\limits_{|x|\to+\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right) = \lim\limits_{|x|\to+\infty} \dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}$ بوضع: $t=\dfrac{1}{x}$ نجد؛ $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{e^t-1}{t}=1$ نهاية شهيرة ويمكن برهانها بطريقة

العدد المشتق

ب/ استنتاج أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y=x+1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f)

نبين أن : $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=0$

لدينا؛ $$\lim_{|x|\to+\infty}\left[f(x)-(x+1)\right] = \lim_{|x|\to+\infty}\left[xe^{\frac{1}{x}}-x-1\right] = \lim_{|x|\to+\infty}\left[\underbrace{x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)}_{=1}-1\right] = 1-1=0$$

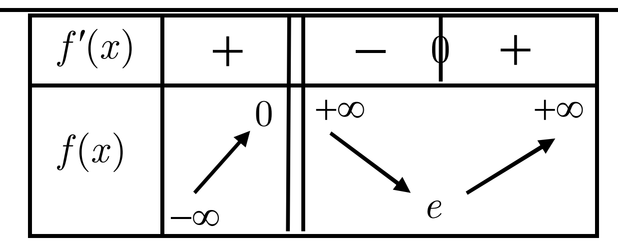
ومنه $y=x+1$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$ و $+\infty$

4) حساب $f'(x)$: f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا؛ $$f'(x)=e^{\frac{1}{x}}+x\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}=\left(1-\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}=\left(\frac{x-1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $\dfrac{x-1}{x}$ لان $e^{\frac{1}{x}}>0$ وعليه نحل المعادلة $\dfrac{x-1}{x}$ أي $x-1=0$ ومنه $x=1$

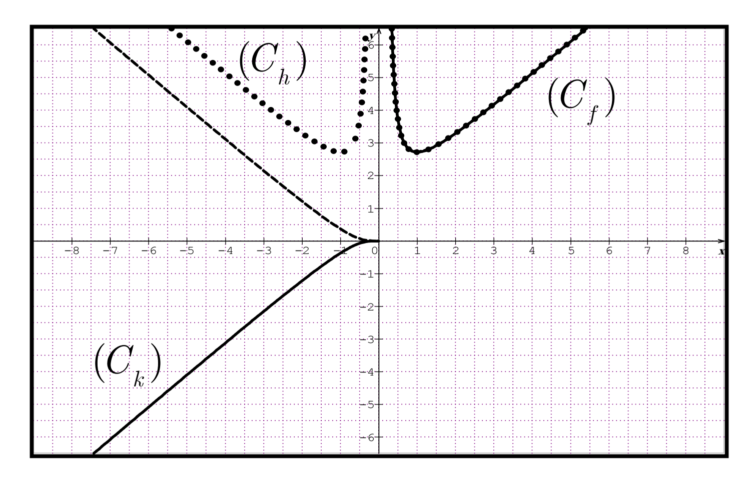
x	$-\infty$ 0 1 $+\infty$

*/جدول تغيرات الدالة f



$f'(x)$	$+$	‖	$-$ 0 $+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗ 0	‖	$+\infty$ ↘ e ↗ $+\infty$

5) رسم (C_k) ، (C_h) و (C_f)



6) */ حساب $g'(x)$ ؛ g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ ولدينا $g'(x) = 2x.f'(x^2)$

*/ إشارة $g'(x)$ من إشارة جداء $2x$ و $f'(x^2)$ و x^2 و x ينتمي للمجال $]0;+\infty[$

وبالتالي تكون إشارة $f'(x^2)$ من الشكل

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$2x$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$f'(x^2)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	

7) أ/ استنتاج منحنى (C_h) انطلاقا من (C_f)

إذا كان $x \geq 0$ نحصل على $h(x) = f(x)$ ، ومنه (C_h) ينطبق على (C_f)

ونكمل الجزء المتبقي من (C_h) بالتناظر بالنسبة إلى محور التراتيب لان h زوجية

ب/ استنتاج منحنى (C_k) انطلاقا من (C_f)

على المجالات التي تكون فيها $f(x) \geq 0$ أي (C_f) فوق محور الفواصل نحصل على $k(x) = f(x)$ ومنه (C_k) ينطبق على (C_f)

على المجالات التي تكون فيها $f(x) \leq 0$ أي (C_f) تحت محور الفواصل نحصل على $k(x) = -f(x)$

ومنه (C_k) نظير (C_f) بالنسبة إلى محور الفواصل

التمرين 12:

1) بقراءة بيانية

أ/ $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 1$

ب/ حساب $g'(1)$ ، عند $x = 1$ المماس للمنحنى أفقي معناه $g'(1) = 0$

لحساب $g'(0)$ نختار نقطتين من المماس لحساب ميله مثلا $(0;1)$ و $(-1;0)$ وعليه $g'(0) = \dfrac{1-0}{0-(-1)} = 1$

ج/ لدينا من البيان؛ g مستمرة ورتيبة تماما(متزايدة تماما) و $g(-0,57) \approx -0,007 < 0$

و $g(-0,56) \approx 0,01 > 0$

ومنه حسب نظرية القيم المتوسطة يوجد حل وحيد α من المجال $]-0,57;-0,56[$ يحقق $g(\alpha) = 0$

*/ استنتاج إشارة $g(x)$

x	$-\infty$ α $+\infty$
$g(x)$	$-$ 0 $+$

2) باستعمال المعطيات السابقة بيّن أن: $g(x) = xe^{-x} + 1$

*/ نحسب أولا $g'(x)$ بدلالة a و b : $g'(x) = ae^{bx} + abxe^{bx} = (a + abx)e^{bx}$

*/ ثانيا : $g'(1) = 0 \Rightarrow (a+ab)e^{b} = 0 \Rightarrow a + ab = 0$ و $g'(0) = 1 \Rightarrow (a+0)e^{0} = 1 \Rightarrow a = 1$

ومنه $1 + b = 0$ معناه $b = -1$ وبالتالي $g(x) = xe^{-x} + 1$

$II-$

1) إثبات أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} x-(x+1)e^{-x} = +\infty.0$ حالة عدم تعيين

رفعها: $\lim\limits_{x\to+\infty} x-(x+1)e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x - \underbrace{xe^{-x}}_{=0} - \underbrace{e^{-x}}_{=0} = +\infty$

2) أ/ تبيان أن؛ $f'(x) = g(x)$: f قابلة للاشتقاق على $]-1;+\infty[$

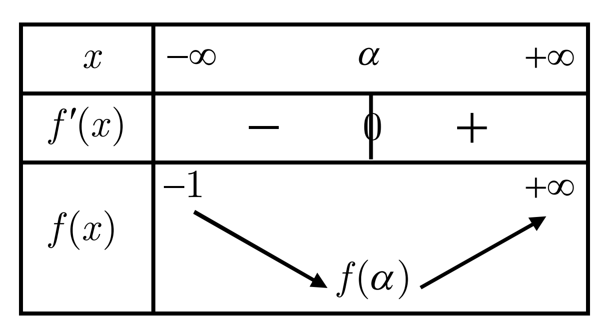
$$f'(x) = 1-\left[xe^{-x}-(x+1)e^{-x}\right] = 1-\left[e^{-x}-xe^{-x}-e^{-x}\right] = 1+xe^{-x} = g(x)$$

ب/ استنتاج اتجاه تغير الدالة f على $]-1;+\infty[$: إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ وعليه تكون الإشارة كما يلي

x	-1 α $+\infty$
$f'(x)$	$-$ 0 $+$

f متزايدة تماما على المجال $]\alpha;+\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $]-1;\alpha[$

*/ جدول التغيرات



x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	-1	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

3) أ/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x-(x+1)e^{-x}-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\underbrace{-xe^{-x}}_{=0}-\underbrace{e^{-x}}_{=0}=0$

تُفسّر هندسيا: $y=x$ **مقارب مائل لـ** $\left(C_f\right)$ **بجوار** $+\infty$

ب/ ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$

مما سبق: $f(x)-y=-(x+1)e^{-x}$ **وعليه إشارة الفرق من إشارة** $-(x+1)$ **لان** $e^{x}>0$

*/ **نحل المعادلة:** $-x-1=0\Rightarrow x=-1$

x	-1	$+\infty$
$f(x)-y$	0 $-$	

ومنه $\left(C_f\right)$ **تحت** (Δ) **على المجال** $\left]-1;+\infty\right[$ **و** $\left(C_f\right)\cap(\Delta)=\left\{(-1;-1)\right\}$

4) */ **نحسب** $f''(x)$ **؛ لدينا** $f''(x)=g'(x)=(1-x)e^{-x}$

*/ **نحل المعادلة:** $f''(x)=0$ **؛** $(1-x)e^{-x}=0$ **معناه** $1-x=0$ **أي** $x=1$

x	-1		1		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	

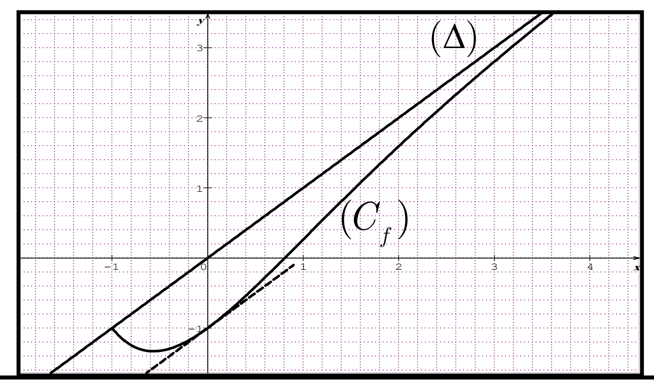
$f''(x)$ **تنعدم عند النقطة ذات الفاصلة** 1 **مغيرة إشارتها ومنه النقطة** $\left(1;f(1)\right)$ **هي نقطة انعطاف لـ** $\left(C_f\right)$

5) **نحل المعادلة:** $f'(x_0)=1$ **؛ لدينا** $f'(x_0)=1\Rightarrow x_0e^{-x_0}+1=1\Rightarrow x_0e^{-x_0}=0\Rightarrow x_0=0$

نكتب معادلة المماس عند $x_0=0$: $y=f'(0)(x-0)+f(0)$ **و** $f'(0)=1$ **و** $f(0)=-1$

ومنه $(d):y=x-1$

6) **أنشئ** $\left(C_f\right)$، (d) **و** (Δ) (**نأخذ:** $f(\alpha)\approx-1{,}3$)



7) المناقشة البيانية للمعادلة: $m+(x+1)e^{-x}=0$

$$m+(x+1)e^{-x}=0 \Rightarrow -(x+1)e^{-x}=m \Rightarrow x-(x+1)e^{-x}=x+m \Rightarrow f(x)=x+m$$

حلول هذه المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم المائل ذا المعادلة؛ $y=x+m$ الموازي لـ (d)

و (Δ) وعليه نقارن m مع 0 و -1

*/ $m<-1$ لا يوجد حلول

*/ $m=-1$ يوجد حل وحيد معدوم

*/ $-1<m<0$ يوجد حلان مختلفان في الإشارة

*/ $m=0$ يوجد حل وحيد سالب

*/ $m>0$ لا يوجد حلول

التمرين 15

1) كتابة $f(x)$ دون رمز القيمة المطلقة

تذكير: $|x|=x$ إذا كان $x\geq 0$ و $|x|=-x$ إذا كان $x\leq 0$ وعليه

$$\begin{cases} f(x)=\frac{1}{2}x+1+e^{-x} \, ; x\geq 0 \\ f(x)=\frac{1}{2}x+1+e^{x} \, ; x\leq 0 \end{cases}$$

2) دراسة استمرارية الدالة f عند 0

*/ أولا: $f(0)=2$

*/ ثانيا: نحسب $\lim_{x\to 0} f(x)$؛ $\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}x+1+e^{-|x|}=2$ ومنه f مستمرة عند 0 لان $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$

3) دراسة قابلية اشتقاق الدالة f عند 0

*/ ح ع ت $\lim_{x\overset{<}{\longrightarrow}0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\overset{<}{\longrightarrow}0}\frac{\frac{1}{2}x+1+e^{x}-2}{x}=\lim_{x\overset{<}{\longrightarrow}0}\frac{\frac{1}{2}x+e^{x}-1}{x}=\frac{0}{0}$

رفعــها: طريقة العدد المشتق؛ نأخذ $g(x)=\frac{1}{2}x+e^{x}$ لدينا $g(0)=1$

ومنه $\lim_{x\overset{<}{\longrightarrow}0}\frac{\frac{1}{2}x+e^{x}-1}{x}=\lim_{x\overset{<}{\longrightarrow}0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=g'(0)$

$g'(x)=\frac{1}{2}+e^{x}$ وعليه $g'(0)=\frac{1}{2}+e^{0}=\frac{3}{2}$ ومنه $\lim_{x\overset{<}{\longrightarrow}0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{3}{2}=f'_g(0)$

*/ بنفس الكيفية نجد $\lim_{x\overset{>}{\longrightarrow}0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-\frac{1}{2}=f'_d(0)$

الخلاصة: f غير قابلة للاشتقاق عند 0 لان $\frac{3}{2}\neq-\frac{1}{2}$

تُفسّر هندسيا: (C_f) يقبل نصفي مماسين عند النقطة $\left(0, f(0)=2\right)$ ميلهما $-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$

وتسمى النقطة $(0;2)$ نقطة زاوية

4) كتابة معادلة نصفي المماسين للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0

*/ $y = f_d'(0)(x-0)+f(0)$ وبما أن $f_d'(0) = -\frac{1}{2}$ و $f(0)=2$ فان $(T_1) : y = -\frac{1}{2}x+2$

*/ $y = f_g'(0)(x-0)+f(0)$ وبما أن $f_g'(0) = \frac{3}{2}$ و $f(0)=2$ فان $(T_2) : y = \frac{3}{2}x+2$

5) حساب نهاية الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2}x+1+e^{\overbrace{-|x|}^{-\infty}} = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}x+1+e^{\overbrace{-|x|}^{-\infty}} = +\infty$$

6) دراسة اتجاه تغير الدالة f

*/ لما $x \geq 0$ لدينا: $f(x) = \frac{1}{2}x+1+e^{-x}$ ومنه $f'(x) = \frac{1}{2}-e^{-x}$

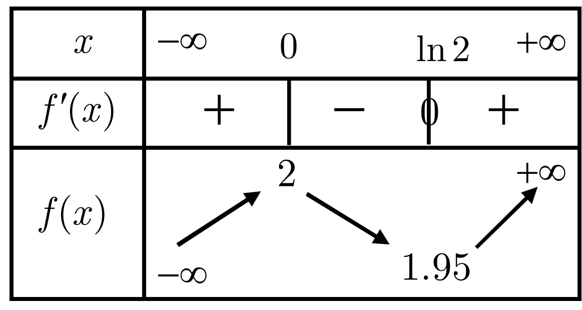
$$\frac{1}{2}-e^{-x}=0 \Rightarrow e^{-x}=\frac{1}{2} \Rightarrow x = \ln 2$$

x	0 $\qquad\qquad$ $\ln 2$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$

*/ لما $x \leq 0$ لدينا: $f(x) = \frac{1}{2}x+1+e^{x}$ ومنه $f'(x) = \frac{1}{2}+e^{x} > 0$

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ 0
$f'(x)$	$+$

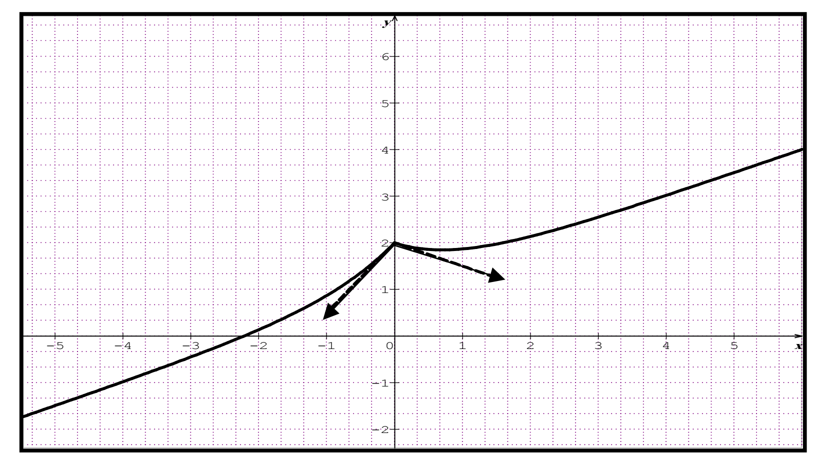
جدول التغيرات: نلصق جدول الإشارة الأول مع الثاني نجد **[علما أن** $f(\ln 2) \approx 1,95$ **]**



x	$-\infty$	0	$\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	2 ↘	1.95 ↗	$+\infty$

7) تطبيق لمبرهنة القيم المتوسطة: كما رأينا ذلك في الحلول السابقة

8) رسم المنحنى (C_f)



9) المناقشة البيانية للمعادلة: $1-m+e^{-|x|}=0$

$$1-m+e^{-|x|}=0 \Rightarrow 1+e^{-|x|}=m \Rightarrow \frac{1}{2}x+1+e^{-|x|}=m \Rightarrow f(x)=m$$

حلول هذه المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم الأفقي ذا المعادلة؛ $y=m$

*/ $m<\frac{3+\ln 2}{2}\approx 1,95$ **يوجد حل وحيد سالب**

*/ $m\approx 1,95$ **يوجد حلان أحدهما مضاعف موجب والأخر سالب**

*/ $1,95<m<2$ **يوجد ثلاث حلول حلان م وجبان والأخر سالب**

*/ $m=2$ **يوجد حلان أحدهما معدوم والأخر موجب**

*/ $m>2$ **يوجد حل وحيد موجب**

التمرين 16

$I-$

1) حساب $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)$

$$\lim_{x\to-\infty} 2-\underbrace{xe^{x}}_{=0}=2 \qquad \lim_{x\to+\infty} 2-xe^{x}=-\infty$$

2) دراسة اتجاه تغير الدالة g : g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا؛ $g'(x)=-e^{x}-xe^{x}=(-1-x)e^{x}$

*/ نحل المعادلة : $(-1-x)e^{x}=0$ معناه $-1-x=0$ ومنه $x=-1$

إشارة $g'(x)$ من إشارة $-1-x$ لان $e^{x}>0$

*/ جدول التغيرات

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	2 ↗	$2,36$	↘ $-\infty$

3) أ/ g مستمرة ورتيبة تماما(متناقصة تماما) على $]0;+\infty[$

و $\begin{cases} g(0)=2 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty \end{cases} \Leftarrow g(0)\times\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)<0$

ومنه حسب نظرية القيم المتوسطة يوجد حل وحيد α في المجال $]0;+\infty[$ يحقق: $g(\alpha)=0$

ب/ التحقق من أن: $0,8<\alpha<0,9$

$g(0,8)\simeq 0,2>0$ $g(0,9)\simeq -0,2<0$ ومنه $0,8<\alpha<0,9$

*/ استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$ α $+\infty$
$g(x)$	+ 0 −

$-II$

1) حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$: $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\overbrace{2x+2}^{-\infty}}{\underbrace{e^x}_{0}+2}=\frac{-\infty}{2}=-\infty$

*/ برهان أن؛ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$: حالة عدم تعيين، $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+2}{e^x+2}=\frac{+\infty}{+\infty}$

رفعها: نستخرج x أو e^x (تفي بالغرض) عامل مشترك من البسط والمقام

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+2}{e^x+2}=\frac{\cancel{x}\left(2+\underbrace{\frac{2}{x}}_{0}\right)}{\cancel{x}\left(\underbrace{\frac{e^x}{x}}_{+\infty}+\underbrace{\frac{2}{x}}_{0}\right)}=\frac{2}{+\infty}=0$$

تُفسر هندسيا: $y=0$ مقارب أفقي لـ (C_f) بجوار $+\infty$

2) أ/تبيّان أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ ؛ $f'(x)=\frac{2g(x)}{(e^x+2)^2}$: f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$f'(x)=\frac{2\times(e^x+2)-e^x(2x+2)}{(e^x+2)^2}=\frac{2(e^x+2-xe^x-e^x)}{(e^x+2)^2}=\frac{2(2-xe^x)}{(e^x+2)^2}=\frac{2.g(x)}{(e^x+2)^2}$$

ب/ استنتاج إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$ ، إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ لان المقام موجب تماما ومنه جدول التغيرات يكون كالتالي:

x	$-\infty$ α $+\infty$
$f'(x)$	+ 0 −
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $f(\alpha)$ ↘ 0

3)تبيّان أن: $f(\alpha)=\alpha$: لدينا $f(\alpha)=\dfrac{2\alpha+2}{e^{\alpha}+2}.....(1)$

ومن جهة أخرى $g(\alpha)=2-\alpha e^{\alpha}=0\Rightarrow e^{\alpha}=\dfrac{2}{\alpha}......(2)$ نعوض (2) في (1) نجد

$$f(\alpha)=\frac{2\alpha+2}{\frac{2}{\alpha}+2}=\frac{2\alpha+2}{\frac{2\alpha+2}{\alpha}}=\alpha$$

4) نُبيّن أن: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=0$ ؛ أولا نحسب الفرق $f(x)-(x+1)$

$$f(x)-(x+1)=\frac{2x+2}{e^{x}+2}-(x+1)=\frac{2x+2-xe^{x}-e^{x}-2x-2}{e^{x}+2}=\frac{(-x-1)e^{x}}{e^{x}+2}$$

ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(-x-1)e^{x}}{e^{x}+2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-xe^{x}-e^{x}}{e^{x}+2}=0$

5) دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ): ندرس إشارة الفرق $f(x)-(x+1)$

لدينا: $f(x)-\left(x+1\right)=\dfrac{(-x-1)e^{x}}{e^{x}+2}=0\Rightarrow(-x-1)e^{x}=0\Rightarrow -x-1=0\Rightarrow x=-1$

وإشارة الفرق من إشارة $-x-1$ لان $e^{x}>0$ والمقام موجب تماما ومنه:

x	$-\infty$　　　-1　　　$+\infty$
$f(x)-y$	$+$　　　0　　　$-$

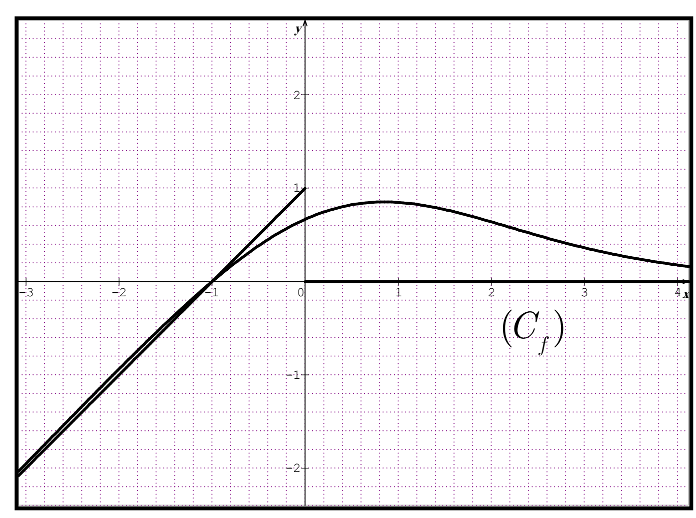
*/ (C_f) فوق (Δ) على المجالين $\left]-\infty;-1\right[$

*/ (C_f) تحت (Δ) على المجال $\left]-1;+\infty\right[$

*/ (C_f) يقطع (Δ) عند النقطة $(-1;0)$

6) إنشاء (Δ) و (C_f)

$f(0)=\dfrac{2}{3}$ ومنه $(C_f)\cap\left(yy'\right)=\left\{\left(0;\dfrac{2}{3}\right)\right\}$



7) $me^x+2(m-1)-2x=0\Rightarrow (e^x+2)m=2x+2\Rightarrow \frac{2x+2}{e^x+2}=m\Rightarrow f(x)=m$

يكون لهذه المعادلة حلان موجبان إذا كان: $\frac{2}{3}<m<f(\alpha)$

التمرين 17:

I- تعيين a، b و c

(C_f) يشمل النقطة O معناه $f(0)=0\Rightarrow a+b+c=0......(1)$

f' تنعدم من أجل $x=\ln\frac{3}{4}$ معناه $f'\left(\ln\frac{3}{4}\right)=0$ نحسب $f'(x)$: $f'(x)=2ae^{2x}+be^x$

$$f'\left(\ln\frac{3}{4}\right)=2ae^{2\ln\frac{3}{4}}+be^{\ln\frac{3}{4}}=2ae^{\ln\left(\frac{3}{4}\right)^2}+\frac{3}{4}b=\frac{9}{8}a+\frac{3}{4}b=0\Rightarrow b=-\frac{3}{2}a....(2)$$

$y=1$ مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$ معناه $\lim_{x\to-\infty}f(x)=1\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}a\underbrace{e^{2x}}_{0}+b\underbrace{e^x}_{0}+c=1\Rightarrow c=1$

نعوض قيمة c في (1) نجد $a+b=-1..(3)$ نعوض (2) في (3) نجد $a=2$ ثم نعوض قيمة a في (2) نجد $b=-3$

II- نأخذ فيما يلي: $a=2$ و $b=-3$ و $c=1$: $f(x)=2e^{2x}-3e^x+1$

1) حساب $\lim_{x\to+\infty}f(x)$: حالة عدم تعيين $\lim_{x\to+\infty}2e^{2x}-3e^x+1=+\infty-\infty$

رفعها ؛ $\lim_{x\to+\infty}2e^{2x}-3e^x+1=e^{2x}\left(2-\frac{3}{e^x}+\frac{1}{e^{2x}}\right)=+\infty\times2=+\infty$

2) دراسة اتجاه تغير f ،مما سبق: $f'(x)=2ae^{2x}+be^x\Rightarrow f'(x)=4e^{2x}-3e^x$

*/ نحل المعادلة: $4e^{2x}-3e^x=0$، $4e^{2x}-3e^x=0\Rightarrow e^x(4e^x-3)=0\Rightarrow 4e^x-3\Rightarrow x=\ln\frac{3}{4}$

*/ إشارة $f'(x)$ من إشارة $4e^x-3$ لأن $e^x>0$

وجدول التغيرات يكون كالتالي:

x	$-\infty$ $\ln\frac{3}{4}$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$ 0 $+$
$f(x)$	1 ↘ $-0,125$ ↗ $+\infty$

3) تحديد نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل، نحل المعادلة: $f(x)=0$

لحل هذه المعادلة $2e^{2x}-3e^x+1=0$ نضع $e^x=t$ نجد $2t^2-3t^x+1=0$

$t_2=\frac{1}{2}$, $t_1=1$ $\Delta=1>0\Rightarrow$ نحل المعادلتين: $e^x=1\Rightarrow x=0$ و $e^x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=-\ln2$

*/ الخلاصة: $(C_f) \cap (xx') = \{(0;0), (-\ln 2;0)\}$

4) تعيين معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 0

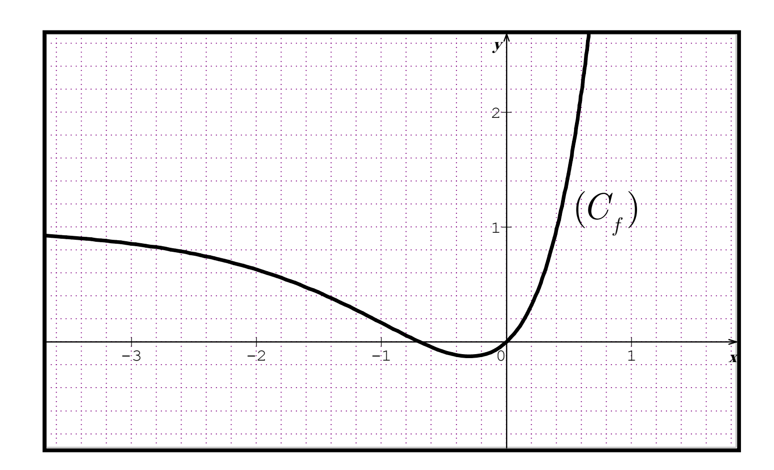
$y = f'(0)(x-0) + f(0)$ و $f'(0) = 1$ و $f(0) = 0$ ومنه $y = x$

5) حساب $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$: حالة عدم تعيين $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2e^{2x} - 3e^{x} + 1}{x} = \frac{+\infty}{+\infty}$

إزالتها: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2e^{2x} - 3e^{x} + 1}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \underbrace{\frac{e^{2x}}{x}}_{+\infty} \left(2 - \underbrace{\frac{3}{e^{x}}}_{0} + \underbrace{\frac{1}{e^{2x}}}_{0} \right) = +\infty$

تفسير هندسيا: (C_f) يقبل فرع لانهائي باتجاه محور التراتيب (yy')

6) إنشاء (C_f)



التمرين 19: الامتحان الأول ثانوية عبد العزيز الشريف 2016/2015

$I-$ المعطيات: $g(x) = \frac{1}{2}x - e^{\frac{x}{2}}$ و $D_g = \mathbb{R}$

1) دراسة تغيرات الدالة g

*/ حساب النهايات: $\lim\limits_{x \to -\infty} \underbrace{\frac{1}{2}x}_{-\infty} - \underbrace{e^{\frac{x}{2}}}_{0} = -\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \underbrace{\frac{1}{2}x}_{+\infty} - \underbrace{e^{\frac{x}{2}}}_{+\infty} = +\infty - \infty$ أي حالة عدم تعيين

نستخرج $\frac{x}{2}$ عامل مشترك نجد: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{2}\left(1 - \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}}\right) = -\infty$ (تذكير $\lim\limits_{u \to +\infty} \frac{e^{u}}{u} = +\infty$)

*/ نحسب المشتقة $g'(x)$: g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، ولدينا: $g'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\left(1 - e^{\frac{x}{2}}\right)$

لمعرفة إشارة $g'(x)$ نحل المعادلة $g'(x) = 0$

$$\frac{1}{2}\left(1 - e^{\frac{x}{2}}\right) = 0 \Rightarrow 1 - e^{\frac{x}{2}} = 0 \Rightarrow e^{\frac{x}{2}} = 1 \Rightarrow \ln e^{\frac{x}{2}} = \ln 1 \Rightarrow \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow x = 0$$

إشارة $g'(x)$ كما هي موضحة في الجدول

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$g'(x)$	$+$ 0 $-$

*/ جدول التغيرات

x	$-\infty$ 1 $+\infty$
$g'(x)$	$+$ 0 $-$
$g(x)$	$-\infty$ ↗ -1 ↘ $-\infty$

2) استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$: من جدول التغيرات نستنتج أن $g'(x) < 0$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$

ومنه الإشارة تكون كالتالي:

x	$-\infty$ $+\infty$
$g(x)$	$-$

$II-$ **المعطيات :** $f(x) = (-x-2)e^{-\frac{x}{2}} + 2 - x$ و $D_f = \mathbb{R}$

1) حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$: $\lim\limits_{x\to-\infty} (-x-2)e^{-\frac{x}{2}} + 2 - x = +\infty$ لا وجود حالة عدم تعيين

2) */تبيّان أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ؛ $f(x) = (-x-2)\left(e^{\frac{-x}{2}} + 1\right) + 4$: لدينا؛

$$(-x-2)\left(e^{\frac{-x}{2}} + 1\right) + 4 = (-x-2)e^{\frac{-x}{2}} + (-x-2) + 4 = (-x-2)e^{\frac{-x}{2}} - x + 2 = f(x)$$ (و . هـ . م)

ملاحظة : من الخطأ كتابة $f(x)$ في بداية الإجابة لأنك بهذه الطريقة أنهيت الإجابة وإنما نصل إليها كنتيجة

*/ حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{(-x-2)}_{-\infty}\left(\underbrace{e^{\frac{-x}{2}} + 1}_{+\infty}\right) + 4 == -\infty$

3) إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = e^{\frac{-x}{2}} g(x)$: f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا

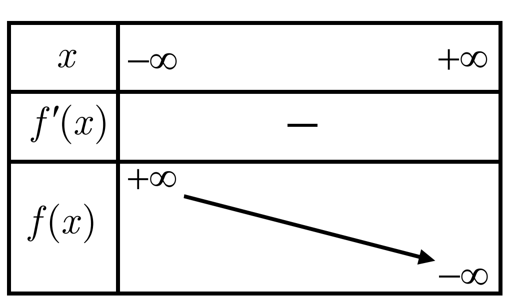
$$f'(x) = -e^{-\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}.(-x-2) - 1 = -e^{-\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}xe^{-\frac{x}{2}} + -e^{-\frac{x}{2}} - 1$$

$$= \frac{1}{2}xe^{-\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}.e^{\frac{x}{2}} = e^{-\frac{x}{2}}\left(\underbrace{\frac{1}{2}x - e^{\frac{x}{2}}}_{g(x)}\right)$$

$$= e^{-\frac{x}{2}}.g(x)$$

4) */استنتاج اتجاه تغير الدالة f : إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ لأن $e^{-\frac{x}{2}} > 0$ وبما أن $g(x) < 0$ (سالبة) فان الدالة f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$

*/ جدول التغيرات :



x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$+\infty$ ↘ $-\infty$

5) أ/ حساب: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(2-x)\right]$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(2-x)\right]=\lim_{x\to+\infty}(-x-2)e^{-\frac{x}{2}}=-xe^{-\frac{x}{2}}-2e^{-\frac{x}{2}}=0$$

تُفسر النتيجة هندسيا: $y=-x+2$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$

ب/تعيّين إحداثيات النقطة B نقطة تقاطع (C_f) مع المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-x+2$

نحل المعادلة $f(x)-(2-x)=0$: $f(x)-(2-x)=0 \Rightarrow (-x-2)e^{-\frac{x}{2}}=0 \Rightarrow -x-2=0 \Rightarrow x=-2$

ومنه $B\left(-2; f(-2)=4\right)$

ج/ استنتاج وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) : ندرس إشارة الفرق $f(x)-(2-x)$

مما سبق $f(x)-(2-x)=(-x-2)e^{-\frac{x}{2}}$ حلها $x=-2$ وإشارة الفرق من إشارة $-x-2$ لأن $e^{-\frac{x}{2}}>0$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x)-y$	$+$	0	$-$

*/ على المجال $\left]-\infty;-2\right[$: (C_f) فوق (Δ)

*/ على المجال $\left]-2;+\infty\right[$: (C_f) تحت (Δ)

*/ (C_f) يقطع (Δ) عند النقطة $D(-2;4)$

6) إثبات أن (C_f) يقبل مماسا يوازي المستقيم (Δ)

نبيّن أنّ للمعادلة $f'(x_0)=-1$ حل علما أن -1 هو ميل المستقيم (Δ)

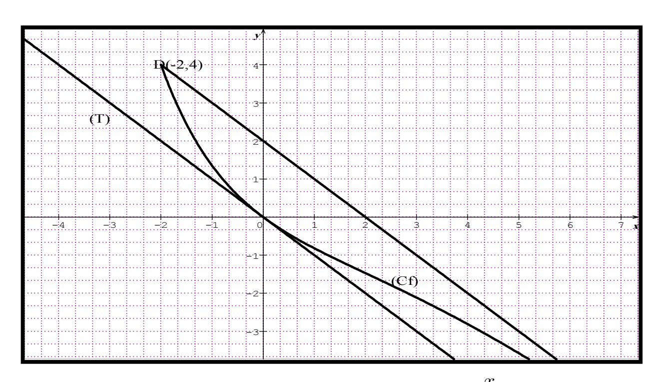
$$f'(x_0)=-1 \Rightarrow \frac{1}{2}x_0e^{-\frac{x_0}{2}}-1=-1 \Rightarrow \frac{1}{2}x_0e^{-\frac{x_0}{2}}=0 \Rightarrow x_0=0$$ لان $e^{-\frac{x_0}{2}}\neq 0$ (و. هـ. م)

7) حساب $f(0)$: $f(0)=0$

*/ كتابة معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة 0 : بصفة عامة $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ ومن أجل $x_0=0$ لدينا $y=f'(0)(x-0)+f(0)$ وبما أن $f(0)=0$ و $f'(0)=-1$ فان معادلة المماس (T) هي: $y=-x$

8) حساب $f(-2)$: $f(-2)=4$

*/ إنشاء (Δ)، (T) و (C_f) على المجال $\left]-2;+\infty\right[$



9) المناقشة البيانية للمعادلة: $(m-2)e^{\frac{x}{2}}+x+2=0$

*/ أولا نغير شكل المعادلة بإظهار الدالة f :

$$(m-2)e^{\frac{x}{2}}+x+2=0 \Rightarrow (m-2)e^{\frac{x}{2}}=-x-2 \Rightarrow (m-2)e^{\frac{x}{2}}.\underline{e^{-\frac{x}{2}}}=\left(-x-2\right).\underline{e^{-\frac{x}{2}}}$$

$$\Rightarrow m-2=\left(-x-2\right).e^{-\frac{x}{2}} \Rightarrow m=\left(-x-2\right).e^{-\frac{x}{2}}+2 \Rightarrow \underline{-x}+m=\underbrace{\left(-x-2\right).e^{-\frac{x}{2}}\underline{-x}+2}_{f(x)}$$

$$\Rightarrow f(x)=-x+m$$

حلول هذه المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم المائل ذا المعادلة $y=-x+m$ الموازي لكل من (T) و (Δ) لان لديهم نفس الميل وبالتالي نقارن m بـ0 و 2

*/ ثانيا: المناقشة البيانية

- $m<0$ لا يوجد حلول
- $m=0$ يوجد حل وحيد معدوم
- $0<m<2$ يوجد حلين مختلفين في الإشارة
- $m=2$ يوجد حل وحيد سالب
- $m>2$ لا يوجد حلول

وفي الأخير ، أسأل الله أن ينفع بما كتبت، هو الموفق والهادي إلى سواء السبيل

✓إعداد الأستاذ : مُحَمَّد حـاقة

فهـــــرس